Hopfalgebrenstrukturen von endlich-dimensionalen Gruppenalgebren

von
Sarah Scherotzke

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
November 2005

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Struktur von Hopfalgebren. Eine Bialgebra ist eine assoziative Algebra A über einem Ring k mit Multiplikation $m : A \otimes_k A \to A$ und Einsabbildung $n : k \to A$, die Algebrenhomomorphismen $\Delta : A \to A \otimes_k A$ und $\varepsilon : A \to k$ mit den folgenden Eigenschaften

- $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$
- $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}$

besitzt. Das System (Δ, ε) nennt man Komultiplikation und ε die Koeins. Existiert zusätzlich eine lineare Abbildung

$$S : A \to A \text{ mit } m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = n \circ \varepsilon,$$

so nennt man das System $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra. Jede Gruppenalgebra kG ist mit den k-linearen Abbildungen

- $\Delta(g) = g \otimes g$
- $\varepsilon(g) = 1$
- $S(g) = g^{-1}$

für alle $g \in G$ eine Hopfalgebra.

Von besonderem Interesse in dieser Arbeit sind die sogenannten gruppen-ähnlichen Elemente. Dabei ist ein gruppen-ähnliches Element einer Hopfalgebra $(H, \Delta, \varepsilon, S)$ ein Element $h \in H$ mit der Eigenschaft, dass $\Delta(h) = h \otimes h$ gilt. Die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente bildet eine Gruppe und ist linear unabhängig.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die gruppen-ähnlichen Elemente einer Gruppenalgebra mit beliebiger Hopfalgebrenstruktur eine Gruppenbasis (d.h. eine Basis der Algebra, die eine Gruppe bezüglich der Multiplikation der Algebra sind) bilden.

Aus den Ergebnissen von Sweedler [Swe69, Theorem 13.0.1] und [Swe69, 8.1.5] folgt, dass eine endlich-dimensionale Hopfalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 genau dann eine Basis aus gruppen-ähnlichen Elementen besitzt, wenn sie kokommutativ ist. In Kapitel 2 entwickeln wir einen direkten Beweis dieses Satzes. Allgemeiner zeigen wir, dass eine endlich-dimensionale Hopfalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik genau dann eine Basis aus gruppen-ähnlichen Elementen besitzt, wenn sie kokommutativ und kohalbeinfach ist.

Im letzten Kapitel geben wir zu jedem Körper positiver Charakteristik eine Gruppe und eine kokommutative Hopfalgebrenstruktur zu der entsprechenden Gruppenalgebra an, so dass diese Hopfalgebra nur das Einselement als gruppen-ähnliches Element besitzt. Man kann Sweedlers Ergebnis also nicht auf Körper positiver Charakteristik ausdehnen.

Da Gruppenalgebren mit kokommutativer Hopfalgebrenstruktur über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0 immer eine Gruppenbasis aus gruppen-ähnlichen Elementen besitzen, stellt sich die Frage, ob es auch nicht kokommutative Hopfalgebrenstrukturen auf solchen Gruppenalgebren gibt. Solche Hopfalgebrenstrukturen zu konstruieren gelingt beispielsweise durch das von Nikshych in [Nik98] eingeführte Twisten von Hopfalgebren. Dies geschieht durch Konjugieren des Bildes der Komultiplikation einer gegebenen Hopfalgebra mit einer Einheit aus dem Tensor-Produkt der Hopfalgebra mit sich selbst. Unter bestimmten Voraussetzungen an diese Einheit entsteht eine Hopfalgebra mit der ursprünglichen Algebrenstruktur und einer neuen Komultiplikation. In Kapitel 3 werden die Ergebnisse von Nikshych dargestellt und es wird untersucht, für welche Gruppen durch Twisten der trivialen Hopfalgebrenstruktur eine nicht kokommutative Hopfalgebra erzeugt werden kann. Schließlich enthält dieses Kapitel noch einige Beispiele, in denen die triviale Hopfalgebrenstruktur einiger Gruppenalgebren getwistet wird, um nicht kokommutative Hopfalgebren zu erzeugen.
Zuletzt untersuchen wir die Hopfalgebrenstruktur kommutativer, halbeinfacher, endlich-dimensionaler Algebren. Wir zeigen, dass solche Hopfalgebren unter bestimmten Voraussetzungen an den Körper zu dualen Gruppenalgebren isomorph sind. Im Fall algebraisch abgeschlossener Körper, deren Charakteristik nicht die Dimension der kommutativen, halbeinfachen Algebra teilt, klassifizieren die trivialen Hopfalgebrenstrukturen über Gruppenalgebren die Hopfalgebrenstrukturen der kommutativen halbeinfachen Algebren der gleichen Dimension. Aus diesen Ergebnissen folgt beispielsweise, dass kommutative halbeinfache Hopfalgebren von Primzahl- oder Primzahlquadratdimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 stets kokommutativ sind und eine Basis aus gruppen-ähnlichen Elementen besitzen. Damit sind solche Hopfalgebren stets Gruppenalgebren.

Das Thema dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Hiß. Ihm danke ich für die hilfsbereite Betreuung und die Freiheit, die er mir bei der Gestaltung dieser Diplomarbeit gelassen hat. Mein besonderer Dank gilt Max Neunhöffer, der immer Zeit fand, auf meine Fragen einzugehen, selbst kritische Fragen zu stellen und durch viele Gespräche zum Gelingen dieser Arbeit beitrug.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Hopfalgebra eingeführt, sowie wesentliche Eigenschaften von Hopfalgebren, die im weiteren Verlauf häufig benutzt werden.

1.1 Das Tensor-Produkt

Voraussetzungen: Es seien A, B Ringe, M ein A-Rechtsmodul, N ein A-Linksmodul und L ein A-Links- und B-Rechtsmodul. Die Menge der A-Rechtsmoduln wird mit Mod-A bezeichnet, die Menge der A-Linksmoduln mit A-Mod und die Menge der A, B-Bimoduln mit A-Mod-B.

1.1.1 Definition

- Die Abbildung $\varphi : M \times N \to U$ in eine abelsche Gruppe U heißt **ausgeglichen**, falls φ bilinear ist und $\varphi(ma, n) = \varphi(m, an)$ für alle $m \in M$, $n \in N$ und $a \in A$ gilt.

- Es sei T eine abelsche Gruppe und $\pi : M \times N \to T$ eine ausgeglichene Abbildung. Das Paar (T, π) heißt ein **Tensor-Produkt** von M und N über A, wenn es für jede abelsche Gruppe U und für jede ausgeglichene Abbildung $\varphi : M \times N \to U$ einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi' : T \to U$ gibt, so dass $\varphi = \varphi' \circ \pi$ ist, also wenn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \\ & T \arrow[u, "\varphi'"'] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

  Man schreibt dann auch $T =: M \otimes_A N$. Elemente $\pi((m, n)) \in M \otimes N$ werden von nun an mit $m \otimes n$ bezeichnet.

1.1.2 Bemerkung
Seien (T_i, π_i), $i = 1, 2$ zwei Tensor-Produkte von M, N über A. Dann existiert ein Isomorphismus abelscher Gruppen $\Psi : T_1 \to T_2$, so dass $\Psi \circ \pi_1 = \pi_2$ gilt. Das Tensor-Produkt von M und N über A ist also bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

1.1.3 Satz
Ein Tensor-Produkt von M und N über A existiert.

Beweis: Es sei F eine freie abelsche Gruppe mit Basis $M \times N$. Das Element $[m,n] \in F$ entspricht $(m,n) \in M \times N$. Wähle

$$\begin{aligned} F_0 := \quad & \langle [m+m',n]-[m,n]-[m',n],\ [m,n+n']-[m,n]-[m,n'], \\ & [ma,n]-[m,an] \mid m,m' \in M,\ n,n' \in N,\ a \in A \rangle \,. \end{aligned}$$

Es sei $T = F/F_0$ und $\pi : M \times N \to T$, $(m,n) \mapsto [m,n] + F_0$. □

Weitere Eigenschaften des Tensorprodukts:

- Es sei $M_i \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ und $N_i \in A\text{-}\mathrm{Mod}$ für $i = 1,2$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1,M_2)$ sowie $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N_1,N_2)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus abelscher Gruppen

  $$\varphi \otimes \psi : M_1 \otimes_A N_1 \to M_2 \otimes_A N_2 \text{ mit } (\varphi \otimes \psi)(m_1 \otimes n_1) = \varphi(m_1) \otimes \psi(n_1)$$

  für alle $m_1 \in M_1,\ n_1 \in N_1$.

- Es sei $M \in B\text{-}\mathrm{Mod}\text{-}A$. Dann hat $M \otimes_A N$ eine Struktur als B-Linksmodul, so dass die Eigenschaft $b(m \otimes n) = bm \otimes n$ für alle $b \in B,\ m \in M$ und $n \in N$ erfüllt ist. Durch diese Eigenschaft ist $M \otimes_A N$ als B-Linksmodul eindeutig bestimmt.

- Es sei I eine Indexmenge und $M_i \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ für alle $i \in I$. Dann existiert genau ein Homomorphismus abelscher Gruppen

  $$\vartheta : (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes A)$$

  so dass

  $$\vartheta((m_i)_{i\in I} \otimes n) = (m_i \otimes n)_{i \in I} \qquad \text{für alle } (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ gilt.}$$

- Es seien A ein kommutativer Ring und M, N freie A-Moduln mit A-Basen X und Y. Dann ist $M \otimes_A N$ ein freier A-Modul mit Basis $\{x \otimes y \mid x \in X;\ y \in Y\}$.

- **Assoziativgesetz:** Sei $M \in B\text{-}\mathrm{Mod}\text{-}A$ und $L \in \mathrm{Mod}\text{-}B$ und $N \in A\text{-}\mathrm{Mod}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter natürlicher Isomorphismus abelscher Gruppen

  $$\varphi : (L \otimes_B M) \otimes_A N \to L \otimes_B (M \otimes_A N)$$

  so dass

  $$\varphi((l \otimes_B m) \otimes_A n) = l \otimes_B (m \otimes_A n) \quad \text{für alle } l \in L,\ m \in M \text{ und } n \in N \text{ gilt.}$$

- Sei A ein kommutativer Ring und M, N zwei A-Moduln. Dann ist die Abbildung $\tau : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$, die durch $\tau(m \otimes_A n) = n \otimes_A m$ für alle $m \in M$ und $n \in N$ definiert wird, wohldefiniert und ein A-Modulhomomorphismus.

1.2 Hopfalgebren

Im Folgenden Kapitel bezeichne k einen Integritätsbereich. Bei einem Tensorprodukt zwischen zwei k-Algebren M und N schreiben wir abkürzend $M \otimes N$ für $M \otimes_k N$.

Assoziative Algebren werden hier mittels Abbildungen zwischen Tensor-Produkten beschrieben. Durch Dualisieren erhält man den Begriff der Koalgebra. Eine Bialgebra ist eine Algebra und Koalgebra, deren Koalgebrenstruktur mit der Algebrenstruktur verträglich ist. Eine Hopfalgebra ist eine Bialgebra mit Antipode.

1.2.1 Definition

- Es seien A ein k-Modul, $m \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A)$ und $n \in \mathrm{Hom}_k(k, A)$ zwei lineare Abbildungen. Das System (A, m, n) heißt **k-Algebra**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \\ A \otimes A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes m"] \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes A \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

  und

$$\begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes n"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & k \otimes A \arrow[l, "n \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

- Es sei V ein k-Modul, $\Delta \in \mathrm{Hom}_k(V,\ V \otimes V)$ und $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_k(V, k)$ lineare Abbildungen. Das System (V, Δ, ε) heißt eine **k-Koalgebra**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} V \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & V \otimes V \otimes V \\ V \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] & V \otimes V \arrow[u, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

  Die Abbildung Δ nennt man dann auch **koassoziativ**.

$$\begin{tikzcd} k \otimes V & V \otimes V \arrow[l, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] & V \otimes k \\ & V \arrow[ul, "1 \otimes \mathrm{id}"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes 1"'] & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id} \otimes 1 \quad \text{und} \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = 1 \otimes \mathrm{id}\,.$$

  Die Abbildung Δ heißt dann die **Komultiplikation** und ε die **Koeins** der Koalgebra V.

- Es seien (C, Δ, ε) eine k-Koalgebra, (A, m, n) eine k-Algebra, $R = \mathrm{Hom}_k(C, A)$ und $f, g \in R$. Dann heißt

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \in R$$

  die **Konvolution von f und g**.

1.2.2 Bemerkung
Es sei (C, Δ, ε) eine Koalgebra, (A, m, n) eine Algebra und $R = \mathrm{Hom}_k(C, A)$. Dann ist R eine k-Algebra mit Multiplikation:

$$\bar{m} : R \otimes R \to R, \quad f \otimes g \mapsto f * g \quad \text{für alle } f, g \in R$$

$$\bar{n} : k \to R, \quad a \mapsto a(n \circ \varepsilon) \quad \text{für alle } a \in k.$$

Das Einselement von R ist $\bar{n}(1) = n \circ \varepsilon$, denn es gilt:

$$(n\circ\varepsilon)*f = m\circ((n\circ\varepsilon)\otimes f)\circ\Delta = m\circ(n\otimes f)\circ(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = m\circ(n\otimes f)\circ(1\otimes\mathrm{id}) = n(1)f = f$$

und analog

$$f * (n \circ \varepsilon) = f$$

für alle $f \in R$.

1.2.3 Definition
Sei (H, Δ, ε) eine Koalgebra und (H, m, n) eine Algebra über k. Sind Δ und ε Algebrenhomomorphismen, so nennt man H eine **Bialgebra** über k. Weiter sei $R = \mathrm{Hom}_k(H, H)$ und $\mathrm{id} = \mathrm{id}_H \in R$. Die **Antipode** S ist ein Element von R, welches die Gleichungen

$$S * \mathrm{id} = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = n \circ \varepsilon$$

und

$$\mathrm{id} * S = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = n \circ \varepsilon$$

erfüllt. Eine Bialgebra mit Antipode wird **Hopfalgebra** genannt.

Die vorhergehende Definition besagt, dass die Antipode ein inverses Element zur Identitätsabbildung im Endomorphismenring der Bialgebra H bezüglich der Konvolution ist. Aus dieser Definition lassen sich weitere Eigenschaften von S folgern, die in Satz 1.2.12 zusammengefasst werden. Eine Hopfalgebrenstruktur einer Gruppenalgebra liefert folgendes

1.2.4 Beispiel
Es sei G eine Gruppe. Dann ist kG eine Hopfalgebra mit der gewöhnlichen Algebrenstruktur und den linearen Abbildungen

- $\Delta : kG \to kG \otimes kG, \; g \mapsto g \otimes g$
- $\varepsilon : kG \to k, \; g \mapsto 1$
- $S : kG \to kG, \; g \mapsto g^{-1}.$

Wir nennen kG mit der beschriebenen Hopfalgebrenstruktur die **triviale Hopfalgebra** auf kG.

1.2.5 Satz
Der Integritätsbereich k ist eine Hopfalgebra mit:

- $m : k \otimes k \to k, a \otimes b \mapsto ab$
- $\Delta : k \to k \otimes k, a \mapsto a \otimes 1$
- $n = \varepsilon = S = \mathrm{id}\,.$

□

Im Folgenden wird $k \otimes k$ mittels der Multiplikation mit k identifiziert.

1.2.6 Satz

1. Es seien C und D zwei Koalgebren. Dann ist auch $C \otimes D$ eine Koalgebra mit
$$\Delta_{C\otimes D} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D),$$
$$\varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D.$$

2. Analog gilt: sind C und D Algebren, dann ist auch $C \otimes D$ eine Algebra mit
$$m_{C\otimes D} = (m_C \otimes m_D) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}), \qquad m_{C\otimes D} : C \otimes D \otimes C \otimes D \to C \otimes D,$$
$$n_{C\otimes D} = n_C \otimes n_D, \qquad n_{C\otimes D} : k \otimes k \to C \otimes D.$$

3. Seien C und D Bialgebren, dann ist $C \otimes D$ eine Bialgebra mit den Verknüpfungen von 1. und 2. Sind C und D zusätzlich Hopfalgebren mit Antipoden S_C und S_D, dann ist $C \otimes D$ eine Hopfalgebra mit den Verknüpfungen aus 1. und 2. und der Antipode $S_{C\otimes D} := S_C \otimes S_D$.

Beweis: Nachrechnen. □

1.2.7 Bemerkung (die Sweedler Notation)

- Ist C eine Koalgebra, dann schreiben wir $\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_{1,i} \otimes c_{2,i}$ als $\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ oder auch einfach als $c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ und für $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(c)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(c)) = \sum_{i=1}^n c_{1,i} \otimes c_{2,i} \otimes c_{3,i}$ schreiben wir $\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ oder $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$.
- Seien V, W, Z Vektorräume über k, $a \in Z$ und $f : V \to W$ eine Abbildung. Dann sei $f \otimes a : V \to W \otimes Z$ die Abbildung mit $v \mapsto f(v) \otimes a$ für alle $v \in V$.

Zum besseren Verständnis werden einige Eigenschaften von Hopfalgebren in der von Sweedler eingeführten Notation (siehe 1.2.7) aufgeführt.

1.2.8 Beispiel (Beispiele zu Sweedlers Notation)
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra. Dann gilt für alle $g, h \in H$:

1. $$\begin{aligned}\sum_{(gh)} (gh)_{(1)} \otimes (gh)_{(2)} &= \Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) \\ &= \left(\sum_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)}\right)\left(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}\right) \\ &= \sum_{(g)(h)} g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)},\end{aligned}$$
wenn man benutzt, dass Δ ein Algebrenhomomorphismus ist.

2. In $H \otimes k$ gilt weiter
$$\sum_{(g)} g_{(1)}\varepsilon(g_{(2)}) \otimes 1 = \sum_{(g)} g_{(1)} \otimes \varepsilon(g_{(2)}) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(g)) = g \otimes 1$$

und in $k \otimes H$

$$\sum_{(g)} 1 \otimes \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} = \sum_{(g)} \varepsilon(g_{(1)}) \otimes g_{(2)} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(g)) = 1 \otimes g$$

nach der Koeins-Eigenschaft aus 1.2.1. Damit ist

$$\sum_{(g)} g_{(1)}\varepsilon(g_{(2)}) = \sum_{(g)} \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} = g.$$

3. Mit der Antipoden-Eigenschaft aus 1.2.3 folgt

$$\sum_{(g)} g_{(1)}S(g_{(2)}) = (m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta)(g) = (\mathrm{id} * S)(g) = n(\varepsilon(g)) = 1\varepsilon(g)$$

und

$$\sum_{(g)} S(g_{(1)})g_{(2)} = (m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(g) = (S * \mathrm{id})(g) = n(\varepsilon(g)) = 1\varepsilon(g).$$

1.2.9 Definition

- Es seien C und D Koalgebren. Eine k-lineare Abbildung $\sigma : C \to D$ nennt man **Koalgebrenmorphismus**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varepsilon_C"] \arrow[dr, "\sigma"'] & k \\ & D \arrow[u, "\varepsilon_D"'] \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_D \circ \sigma = \varepsilon_C$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\sigma"'] & C \otimes C \arrow[d, "\sigma\otimes\sigma"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

$$\Delta_D \circ \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \circ \Delta_C$$

- Es seien C und D Bialgebren. Einen Algebrenhomomorphismus $\sigma : C \to D$, der zusätzlich ein Koalgebrenmorphismus ist, nennt man **Bialgebrenmorphismus**.

- Es seien C und D Hopfalgebren. Einen Bialgebrenmorphismus $\sigma : C \to D$, der die Bedingung $S_D \circ \sigma = \sigma \circ S_C$ erfüllt, nennt man **Hopfalgebrenmorphismus**.

1.2.10 Lemma
Es seien (H, m, n) eine Algebra und (H, Δ, ε) eine Koalgebra. Dann sind äquivalent:

a) H ist Bialgebra.

b) m, n sind Koalgebrenmorphismen.

c) Δ, ε sind Algebrenhomomorphismen.

d) $\Delta(gh) = \sum_{(g),(h)} g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)}$, $\Delta(1) = 1$ und $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$, $\varepsilon(1) = 1$ für alle $g, h \in H$.

Beweis: Es seien $(H \otimes H, \Delta', \varepsilon')$ bzw. $(H \otimes H, m', n')$ die in Satz 1.2.6 beschriebene Koalgebrenstruktur bzw. Algebrenstruktur, sowie $(k, \bar{m}, \bar{n}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ die Bialgebrenstruktur auf k aus 1.2.4. Die Aussagen a), c) und d) sind nach Definition äquivalent. Die Abbildung Δ ist genau dann ein Algebrenhomomorphismus, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) = (m \otimes m) \circ \Delta'$.

2. $\Delta \circ n = n' \circ \bar{\Delta} = (n \otimes n) \circ \bar{\Delta}$.

Die Abbildung ε ist genau dann ein Algebrenhomomorphismus, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

3. $\varepsilon \circ m = \bar{m} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon'$.

4. $\varepsilon \circ n = \bar{\varepsilon}$.

Die Abbildung m ist genau dann ein Koalgebrenmorphismus, wenn 1. und 3. erfüllt sind und n ist genau dann ein Koalgebrenmorphismus, wenn 2. und 4. erfüllt sind. □

Folgende Begriffe sind bei der Untersuchung von Hopfalgebren von zentraler Bedeutung:

1.2.11 Definition
Es sei (C, Δ, ε) eine Koalgebra.

- Ein Element $c \in C,\ c \neq 0$ heißt **gruppen-ähnliches Element**, wenn $\Delta(c) = c \otimes c$ gilt. Mit $G(C)$ bezeichnet man die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente.

- Seien $g, h \in G(C)$. Ein $c \in C,\ c \neq 0$ heißt (g, h)-primitiv, falls
$$\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$$
gilt. Die Menge der (g, h)-primitiven Elemente nennen wir $P_{g,h}(C)$. Ist C eine Bialgebra und $g = h = 1$, dann heißen die Elemente von $P(C) := P_{1,1}(C)$ **primitive Elemente**.

- Sei $\tau : A \otimes B \to B \otimes A,\ a \otimes b \mapsto b \otimes a$ für alle $a \otimes b \in A \otimes B$. Gilt $\tau \circ \Delta = \Delta$, so heißt C **kokommutativ**.

- Ein Untermodul D von C mit $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$ heißt **Unterkoalgebra**.

- Eine Koalgebra $C \neq \{0\}$, die außer C und $\{0\}$ keine Unterkoalgebra besitzt, nennt man eine **einfache Koalgebra**.

Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra. Ist L eine Unterkoalgebra und eine Unteralgebra mit $S(L) \subset L$, dann nennt man L eine **Unterhopfalgebra**.

1.2.12 Satz (Eigenschaften von S, siehe [Swe69, Prop. 4.0.1])
Sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra über k, dann gilt:

1. $S \circ m = m \circ (S \otimes S) \circ \tau$, also ist S ein Antialgebrenhomomorphismus.

2. $S(1) = 1$, das heißt $S \circ n = n$.

3. $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

4. $\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$, also ist S ein Antikoalgebrenmorphismus.

5. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

   (a) $m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = n \circ \varepsilon$.

   (b) $m \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = n \circ \varepsilon$.

   (c) $S \circ S = \mathrm{id}$.

6. Ist H kommutativ oder kokommutativ, dann ist $S^2 = \mathrm{id}$.

Beweis: Die Algebra $H \otimes H$ ist eine Hopfalgebra mit den Abbildungen aus Satz 1.2.6. Es seien $(m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ die Abbildungen zur Hopfalgebra $H \otimes H$. Benutzt man die Koalgebrenstruktur von H und die Algebrenstruktur von $H \otimes H$, dann ist $\mathrm{Hom}_k(H, H \otimes H)$ bezüglich der Konvolution aus Bemerkung 1.2.2 eine Algebra mit Einselement $n' \circ \varepsilon$. Betrachtet man $H \otimes H$ als Koalgebra und H als Algebra, so ist $\mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$ eine Algebra bezüglich der Konvolution mit Einselement $n \circ \varepsilon'$.

1. Seien ν, $\rho \in \mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$ mit $\nu := m \circ (S \otimes S) \circ \tau$ und $\rho := S \circ m$.

   Wir zeigen: $\rho * m = m * \nu = n \circ \varepsilon'$

$$\begin{aligned}
\rho * m &= m \circ ((S \circ m) \otimes m) \circ \Delta' \\
&= m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ (m \otimes m) \circ \Delta' \\
&= m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ m \quad \text{[da } m \text{ nach 1.2.10 ein Koalgebrenmorphismus ist]} \\
&= n \circ \varepsilon \circ m \quad \text{[mit der Antipoden-Eigenschaft]} \\
&= n \circ \varepsilon', \quad \text{[da } m \text{ ein Koalgebrenmorphismus ist]}
\end{aligned}$$

   weiter gilt

$$\begin{aligned}
m * \nu &= m \circ (m \otimes (m \circ (S \otimes S) \circ \tau)) \circ \Delta' \\
&= m \circ (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes S \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ \Delta' \\
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes S \otimes S) \circ \\
&\quad (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \quad \text{[mit dem Assoziativgesetz]} \\
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes (m \circ (\mathrm{id} \otimes S)) \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes (n \circ \varepsilon)) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \quad \text{[mit der Antipoden Eigenschaft]} \\
&\quad \text{[und da das Bild von } n \circ \varepsilon \text{ im Zentrum von } H \text{ liegt]} \\
&= m \circ ((m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta) \otimes (n \circ \varepsilon)) \\
&= m \circ ((n \circ \varepsilon) \otimes (n \circ \varepsilon)) = n \circ \varepsilon'
\end{aligned}$$

   Somit gilt $\rho * m = m * \nu = n \circ \varepsilon'$. Da $n \circ \varepsilon'$ das Einselement der Algebra $\mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$ ist, gilt $\rho = \nu$.

2. Da $\varepsilon(1)1 = 1$ und $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ ist, folgt

$$1 = n(\varepsilon(1)) = (\mathrm{id} * S)(1) = (m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(1) = S(1).$$

3. Es gilt $\varepsilon \circ n \circ \varepsilon = \varepsilon$ und $n \circ \varepsilon = S * \mathrm{id}$. Sei $\bar{m}$ die Multiplikation in k, dann folgt, wenn man die Koeins-Eigenschaft verwendet

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon \circ n \circ \varepsilon = \varepsilon \circ (S * \mathrm{id}) \\
&= \varepsilon \circ m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \bar{m} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\
&\quad \text{[da } \varepsilon \text{ ein Algebrenhomomorphismus ist]} \\
&= \bar{m} \circ ((\varepsilon \circ S) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \bar{m} \circ ((\varepsilon \circ S) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes 1) \\
&= \varepsilon \circ S.
\end{aligned}$$

4. Es seien ν, $\rho \in \mathrm{Hom}_k(H, H \otimes H)$ mit $\nu := \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ und $\rho := \Delta \circ S$.
Wir zeigen zunächst $\rho * \Delta = n' \circ \varepsilon = \Delta * \nu$. Dazu betrachte

$$\begin{aligned}
\rho * \Delta &= m' \circ ((\Delta \circ S) \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= m' \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\
&= \Delta \circ m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \quad \text{[da } \Delta \text{ ein Algebrenhomomorphismus ist]} \\
&= \Delta \circ n \circ \varepsilon \qquad \text{[mit der Antipoden-Eigenschaft]} \\
&= n' \circ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta * \nu &= m' \circ (\Delta \otimes (\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta)) \circ \Delta \\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes S \otimes S) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes S \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{[mit der Koassoziativität]} \\
&= (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes \mathrm{id} \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes (m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta)) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes (n \circ \varepsilon)) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&\quad \text{[mit der Antipoden-Eigenschaft]} \\
&= (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes n(1)) \circ \Delta \\
&\quad \text{[wenn man benutzt, dass } (S \otimes (n \circ \varepsilon)) \circ \tau \circ \Delta = S \otimes n(1) \text{ ist]} \\
&= (n \circ \varepsilon) \otimes n(1) \qquad \text{[mit der Antipoden Eigenschaft]} \\
&= n' \circ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\rho * \Delta = n' \circ \varepsilon = \Delta * \nu$. Da $n' \circ \varepsilon$ das Einselement der Algebra $\mathrm{Hom}_k(H, H \otimes H)$ ist, folgt $\rho = \nu$.

5. Wegen 1. gilt

$$\begin{aligned}
S \circ m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta &= m \circ (S \otimes S) \circ \tau \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \\
&= m \circ (S \otimes S^2) \circ \Delta = S * S^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
S \circ m \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= m \circ (S \otimes S) \circ \tau \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\
&= m \circ (S^2 \otimes S) \circ \Delta = S^2 * S.
\end{aligned}$$

"(a) $\Rightarrow$ (c)" Es sei $m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = n \circ \varepsilon$. Nach 2. gilt

$$\begin{aligned} n \circ \varepsilon &= S \circ n \circ \varepsilon = S \circ m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= S * S^2. \end{aligned}$$

Da $S * \mathrm{id} = n \circ \varepsilon$ das Einselement des Rings $R = \mathrm{Hom}_k(H, H)$ ist, gilt

$$\mathrm{id} = (n \circ \varepsilon) * \mathrm{id} = S^2 * S * \mathrm{id} = S^2 * (n \circ \varepsilon) = S^2.$$

"(c) $\Rightarrow$ (a)" Es sei $S^2 = \mathrm{id}$. Dann gilt mit 2.

$$\begin{aligned} n \circ \varepsilon &= S \circ n \circ \varepsilon = S \circ (S * \mathrm{id}) = S \circ (S * S^2) \\ &= S \circ S \circ m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Völlig analog zeigt man "(b)$\Leftrightarrow$ (c)".

6. Ist H kokommutativ, dann gilt

$$\begin{aligned} n \circ \varepsilon &= m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \tau \circ \Delta \\ &= m \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung aus 5.(a) erfüllt und es folgt $S^2 = \mathrm{id}$. Ist H kommutativ, dann gilt

$$n \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

Also ist die Bedingung aus 5.(b) erfüllt und es folgt $S^2 = \mathrm{id}$. □

Das folgende Theorem verallgemeinert den bekannten Satz, dass eine Gruppenalgebra frei über der Gruppenalgebra einer Untergruppe ist.

1.2.13 Satz (Freiheitstheorem für Unterhopfalgebren)
Es seien k ein Körper, H eine endlich-dimensionale Hopfalgebra und L eine Unterhopfalgebra von H. Dann ist H frei als L-Rechtsmodul. Damit gilt: $\dim L$ teilt $\dim H$.

Beweis: siehe [Mon93, 3.2.1]. □

1.2.14 Satz (Eigenschaften der gruppen-ähnlichen Elemente)
Es seien $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra, H ein torsionsfreier k-Modul und $G(H)$ die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente. Dann gilt:

1. $\varepsilon(g) = 1$ und $S(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G(H)$.

2. $G(H)$ ist eine Gruppe.

3. $G(H)$ ist linear unabhängig. Ist H endlich-erzeugt und frei als k-Modul, dann gilt $|G(H)| \leq \dim H$.

4. Ist H endlich-erzeugt und frei als k-Modul, dann sind die Elemente aus $G(H)$ Einheiten endlicher Ordnung.

5. $kG(H)$ ist eine Unterhopfalgebra. Ist k ein Körper und H endlich-dimensional, so teilt $|G(H)|$ die Dimension von H.

Beweis:

1. Es sei g ein beliebiges Element in $G(H)$. Mit der Koeins-Eigenschaft folgt
$$1 \otimes g = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(g)) = \varepsilon(g) \otimes g = \varepsilon(g)(1 \otimes g)$$
und damit ist $\varepsilon(g) = 1$. Weiter gilt
$$1 = \varepsilon(g)1 = m\left((\mathrm{id} \otimes S)(\Delta(g))\right) = gS(g)$$
und analog
$$1 = \varepsilon(g)1 = m\left((S \otimes \mathrm{id})(\Delta(g))\right) = S(g)g.$$
Hieraus folgt $S(g) = g^{-1}$, also ist g eine Einheit.

2. Seien $g, h \in G(H)$. Da Δ ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt
$$\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = gh \otimes gh.$$
Somit ist auch $gh \in G(H)$. Da alle Elemente von $G(H)$ Einheiten sind und $G(H)$ multiplikativ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung.

3. Wir nehmen an, $G(H)$ sei nicht linear unabhängig. Dann existieren $x, x_1, \ldots, x_n \in G(H)$, so dass $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear unabhängig und $\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ linear abhängig sind. Somit hat ax für ein $a \in k \setminus \{0\}$ eine Darstellung der Form $ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ mit $a_1, \ldots, a_n \in k$ und o.B.d.A $a_1 \neq 0$. Dann gilt
$$\Delta(a^2 x) = ax \otimes ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i \otimes \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j x_i \otimes x_j, \text{ da } x \in G(C) \text{ ist}$$
und
$$\Delta(a^2 x) = \sum_{i=1}^n a a_i x_i \otimes x_i.$$
Da die $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, sind auch die $\{x_i \otimes x_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ linear unabhängig in $H \otimes H$. Aus $\sum_{i,j=1}^n a_i a_j x_i \otimes x_j = \sum_{i=1}^n a a_i x_i \otimes x_i$, folgt also $a_i a_j = \delta_{i,j} a_i a$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Damit ist $a_j = 0$ für $j \neq 1$ und $a_1 = a$. Also ist $ax = ax_1$. Da H torsionsfrei ist, folgt $x = x_1$. Falls H ein freier k-Modul ist, ist $|G(H)| \leq \dim H$.

4. Es sei x ein beliebiges Element in $G(H)$. Da $G(H)$ nach 2. und 3. eine endliche Gruppe ist, ist x eine Einheit endlicher Ordnung.

5. Sei $G = G(H)$. Nach 2. ist kG eine Unteralgebra. Weiter gilt:
   - $\Delta(kG) \subset kG \otimes kG$
   - $S(kG) \subset kG$

   Also ist kG eine Unterhopfalgebra. Nach dem Freiheitstheorem in 1.2.13 gilt, dass $\dim(kG)$ ein Teiler von $\dim H$ ist. Damit ist der Rest der Behauptung bewiesen. □

1.2.15 Satz (Eigenschaften der primitiven Elemente)
Es seien $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra und $P(H)$ die Menge der primitiven Elemente.

1. Dann ist $P(H)$ mit der Verknüpfung $[x,y] := xy - yx$ für alle $x, y \in P(H)$ eine Lie-Algebra.

2. Es gilt $P(H) \subset \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ und $S(x) = -x$ für alle $x \in P(H)$.

3. Es sei k ein Körper der Charakteristik 0 und $p \in P(H)$. Setzen wir $p^{(i)} := \frac{p^i}{i!}$, dann ist die Folge $(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots)$ linear unabhängig.

Beweis:

1. Für die erste Behauptung genügt es zu prüfen, dass $P(H)$ bezüglich $[,]$ abgeschlossen ist. Seien $x, y \in P(H)$, dann ist

$$\Delta([x,y]) = \Delta(xy) - \Delta(yx) = \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) = [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y].$$

Damit gilt $[x,y] \in P(H)$ für alle $x, y \in P(H)$.

2. Es sei $x \in P(H)$. Aus der Koeins-Eigenschaft folgt:

$x \otimes 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x)) = 1 \otimes \varepsilon(x) + x \otimes 1$. Damit folgt $\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in P(H)$. Aus $0 = \varepsilon(x)1 = m((S \otimes \mathrm{id})\Delta(x)) = S(1)x + S(x)1 = x + S(x)$ folgt $S(x) = -x$ für alle $x \in P(H)$.

3. Man rechnet nach: $\Delta(p^{(i)}) = \sum_{j=0}^{i} p^{(j)} \otimes p^{(i-j)}$. Angenommen $(p^{(1)}, \ldots, p^{(l-1)})$ sei linear unabhängig und $(p^{(1)}, \ldots, p^{(l)})$ linear abhängig. Dann hat $p^{(l)}$ eine eindeutige Darstellung der Form $p^{(l)} = \sum_{i=1}^{l-1} a_i p^{(i)}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(p^{(l)}) &= \sum_{j=0}^{l} p^{(j)} \otimes p^{(l-j)} \\
&= \sum_{i=1}^{l-1} a_i (p^{(i)} \otimes 1 + 1 \otimes p^{(i)}) + \sum_{j=1}^{l-1} p^{(j)} \otimes p^{(l-j)} \\
\text{und } \Delta(p^{(l)}) &= \sum_{i=1}^{l-1} a_i \Delta(p^{(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{l-1} a_i \sum_{j=0}^{i} p^{(j)} \otimes p^{(i-j)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{l-1} a_i \sum_{j=0}^{i} p^{(j)} \otimes p^{(i-j)} = \sum_{i=1}^{l-1} a_i (p^{(i)} \otimes 1 + 1 \otimes p^{(i)}) + \sum_{j=1}^{l-1} p^{(j)} \otimes p^{(l-j)}.$$

Da die $(p^{(1)}, \ldots, p^{(l-1)})$ linear unabhängig sind, ist auch $(p^{(j)} \otimes p^{(i)})_{1 \leq i,j \leq l-1}$ eine linear unabhängige Folge in $H \otimes H$. Koeffizientenvergleich liefert einen Widerspruch zur Annahme. Also ist die Folge $(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots)$ linear unabhängig. $\square$

1.2.16 Bemerkung

Nach Satz 1.2.15 hat eine endlich-dimensionale Hopfalgebra über einem Körper der Charakteristik 0 keine primitiven Elemente.

1.2.17 Satz
Es seien $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra, E eine k-Algebra und $\psi : H \to E$ ein k-Algebrenisomorphismus. Dann ist $(E, m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ eine Hopfalgebra mit

- $\Delta' := (\psi \otimes \psi) \circ \Delta \circ \psi^{-1}$,
- $\varepsilon' := \varepsilon \circ \psi^{-1}$,
- $S' := \psi \circ S \circ \psi^{-1}$ und
- ψ ein Hopfalgebrenisomorphismus.

Beweis: Nachrechnen. □

Kapitel 2

Dualisieren

2.1 Die duale Hopfalgebra

Sei im Folgenden k ein Körper. Der Übergang eines Vektorraums in seinen Dualraum ist ein kontravarianter Funktor. Die folgenden Sätze geben an, wie durch Dualisieren eine Koalgebra in eine Algebra und eine Algebra in eine Koalgebra überführt wird. Dualisieren ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Koalgebren mit Koalgebrenmorphismen in die Kategorie der Algebren mit Algebrenhomomorphismen und umgekehrt. Dabei ist im endlich-dimensionalen Fall die zweimalige Anwendung des Funktors natürlich äquivalent zum Identitätsfunktor.

2.1.1 Lemma
Der Schnitt endlich vieler Unterkoalgebren einer Koalgebra C ist eine Unterkoalgebra. Der Schnitt beliebig vieler Unterkoalgebren einer endlich-dimensionalen Koalgebra ist eine Unterkoalgebra.

Beweis: Sei I eine endliche Indexmenge und $\{C_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Unterkoalgebren in C. Wegen Induktion können wir o.B.d.A. $I = \{1, 2\}$ annehmen. Sei also $c \in C_1 \cap C_2$. Dann ist $\Delta(c) \in (C_1 \otimes C_1) \cap (C_2 \otimes C_2)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(C_1 \otimes C_1) \cap (C_2 \otimes C_2) = (C_1 \cap C_2) \otimes (C_1 \cap C_2)$ gilt. Es existieren Vektorräume E und R in C, so dass $E \cap R = \{0\}$, $C_1 = (C_1 \cap C_2) \oplus E$ und $C_2 = (C_1 \cap C_2) \oplus R$ ist. Dann ist

$$C_1 \otimes C_1 = (C_1 \cap C_2) \otimes (C_1 \cap C_2) \oplus (C_1 \cap C_2) \otimes E \oplus E \otimes (C_1 \cap C_2) \oplus E \otimes E$$

und

$$C_2 \otimes C_2 = (C_1 \cap C_2) \otimes (C_1 \cap C_2) \oplus (C_1 \cap C_2) \otimes R \oplus R \otimes (C_1 \cap C_2) \oplus R \otimes R.$$

Damit ist $(C_1 \otimes C_1) \cap (C_2 \otimes C_2) = (C_1 \cap C_2) \otimes (C_1 \cap C_2)$.
Sei C endlich-dimensional. Der Schnitt beliebig vieler Unterkoalgebren ist aus Dimensionsgründen gleich dem Schnitt endlich vieler Unterkoalgebren, also folgt die zweite Behauptung aus der ersten. $\square$

2.1.2 Bemerkung
Seien C und E k-Vektorräume und $C^* := \mathrm{Hom}_k(C, k)$, $E^* = \mathrm{Hom}_k(E, k)$. Dann ist die lineare Abbildung

$$\rho : C^* \otimes E^* \to (C \otimes E)^*, \rho(g \otimes h)(x \otimes y) := g(x)h(y) \text{ für alle } x \in C,\ y \in E,\ g \in C^*\ h \in E^*$$

eine injektive Abbildung. Sind C und E endlich-dimensional, so ist ρ bijektiv. In diesem Fall wird $C^* \otimes E^*$ mittels ρ mit $(C \otimes E)^*$ identifiziert. $\square$

2.1.3 Lemma
Es sei C ein k-Vektorraum und C^* der Dualraum. Nach Bemerkung 2.1.2 ist $C^* \otimes C^* \subset (C \otimes C)^*$. Sei $a \in C \otimes C$ und $(g \otimes f)(a) = 0$ für alle $f, g \in C^*$. Dann gilt $a = 0$.

Beweis: Angenommen $a \neq 0$. Dann existieren linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in C$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i \otimes x_j$ mit $a_{l,k} \neq 0$ für ein Paar $(l,k) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$. Wähle $g, f \in C^*$ mit $f(x_i) = \delta_{i,l}$ und $g(x_i) = \delta_{i,k}$ für alle $i \in 1,\ldots,n$. Dann ist $0 = (g \otimes f)(a) = a_{l,k}$ im Widerspruch zur Annahme. □

2.1.4 Satz

1. Es sei (C, Δ, ε) eine Koalgebra. Dann wird (C^*, m, n) zu der dualen k-Algebra von C durch
$$m : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \text{ und}$$
$$n : k \to C^*,\ a \mapsto a\varepsilon$$
wobei $\Delta^*(l) := l \circ \Delta$ für alle $l \in (C \otimes C)^*$ ist.

   Es gilt also $(\varphi \cdot \psi)(x) = ((\varphi \otimes \psi) \circ \Delta)(x)$ für alle $\varphi, \psi \in C^*$ und für alle $x \in C$. Die Algebrenstruktur von C^* wird also durch die Konvolution aus Bemerkung 1.2.2 mit der Koalgebra C und der Algebra k erzeugt. Insbesondere ist ε das Einselement von C^*.

2. Sei (A, m, n) eine endlich-dimensionale k-Algebra und ρ der Isomorphismus von $A^* \otimes A^*$ nach $(A \otimes A)^*$.

   Dann wird A^* zu einer Koalgebra durch $\Delta := \rho^{-1} \circ m^*$ mit $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$,

   $m^*(l) = l \circ m$ und $\varepsilon : A^* \to k$ mit $\varepsilon(l) := l(1)$ für alle $l \in A^*$.

3. Ist B eine endlich-dimensionale Bialgebra, dann wird B^* durch 1. und 2. zu einer Bialgebra.

4. Ist H eine endlich-dimensionale Hopfalgebra mit Antipode S, dann wird H^* zu einer Hopfalgebra durch 1. und 2. mit Antipode S^*, wobei $S^*(f) := f \circ S$ für alle $f \in H^*$ ist.

Beweis: Nachrechnen der Axiome. □

2.1.5 Bemerkung
Seien C und E zwei endlich-dimensionale Koalgebren, dann ist $\rho : C^* \otimes E^* \to (C \otimes E)^*$ aus 2.1.2 ein Algebrenisomorphismus.

Beweis: Es seien Δ_C bzw. Δ_E die Komultiplikationen von C bzw. E. Weiter seien $\Delta' = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\Delta_C \otimes \Delta_E)$ die Komultiplikation von $C \otimes E$ und $\rho_C : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ bzw. $\rho_E : E^* \otimes E^* \to (E \otimes E)^*$ die Abbildungen aus 2.1.2. Seien $c^*, c_1^* \in C^*$, $e^*, e_1^* \in E^*$ und $c \in C$, $e \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\rho((c^* \otimes e^*) \cdot (c_1^* \otimes e_1^*))(c \otimes e) &= (c^* c_1^*)(c) \otimes (e^* e_1^*)(e) \\
&= \rho_C(c^* \otimes c_1^*)\Delta(c) \otimes \rho_E(e^* \otimes e_1^*)\Delta(e) \\
&= (\rho(c^* \otimes e^*) \otimes \rho(c_1^* \otimes e_1^*))\, \Delta'(c \otimes e) \\
&= (\rho(c^* \otimes e^*) \cdot \rho(c_1^* \otimes e_1^*))\, (c \otimes e)
\end{aligned}$$

Also ist ρ ein Algebrenhomomorphismus und nach Bemerkung 2.1.2 bijektiv. Hiermit folgt die Behauptung. □

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume. Zu Gunsten einer übersichtlicheren Darstellung wird $(V \otimes W)^*$ durch ρ mit $V^* \otimes W^*$ identifiziert. Damit gilt für $v \in V^*$ und $w \in W^*$: $(v \otimes w)(c \otimes b) = v(c)w(b)$ für alle $c \in V$ und $b \in W$. Sei H eine Hopfalgebra und $a \in H^*$ ein Element der dualen Hopfalgebra. Fasst man $\Delta'(a)$ als Element von $(H \otimes H)^*$ auf, dann gilt : $\Delta'(a)(c \otimes b) = a(cd)$ für alle $c, b \in H$.

2.1.6 Satz
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine endlich-dimensionale Hopfalgebra und $(H^*, m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ die dazu duale Hopfalgebra. Dann sind die gruppen-ähnlichen Elemente von H^* genau die Algebrenhomomorphismen von H nach k.

Beweis: Es sei $a \in H^*$ ein Algebrenhomomorphismus, dann ist $a(cd) = a(c)a(d)$ für alle $c, d \in H$. Damit ist $(a \otimes a)(c \otimes d) = a(cd) = \Delta'(a)(c \otimes d)$ für alle $c, d \in H$. Also ist $\Delta'(a) = a \otimes a$. Da a ein Algebrenhomomorphismus ist, ist $a \neq 0$. Also ist a ein gruppen-ähnliches Element in H^*. Es sei umgekehrt $a \in H^*$ ein gruppen-ähnliches Element. Dann gilt $a(cd) = \Delta'(a)(c \otimes d) = (a \otimes a)(c \otimes d) = a(c)a(d)$ für alle $c, d \in H$. Weiter gilt $a(1) = \Delta'(a)(1 \otimes 1) = a(1)^2$, also ist $a(1) = 1$, denn aus $a(1) = 0$ folgt, dass $a = 0$ ist. Damit ist a ein Algebrenhomomorphismus in H. $\square$

Ausgehend von einer Hopfalgebra H erhält man durch 2-faches Dualisieren die Hopfalgebra des Bidualraums H^{**}. Ist H endlich-dimensional, so sind H und H^{**}, wie der folgende Satz zeigt, als Hopfalgebren isomorph.

2.1.7 Satz
Eine endlich-dimensionale Hopfalgebra $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ ist isomorph zu ihrer bidualen Hopfalgebra $(H^{**}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{S}, \bar{m}, \bar{n})$.

Beweis: Sei $(H^*, m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ die zu $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ duale Hopfalgebra. Die Abbildung $\sigma : H \to H^{**}$, $h \mapsto \bar{h}$ mit $\bar{h}(h^*) := h^*(h)$ für alle $h \in H$ ist eine lineare, bijektive Abbildung. Man rechnet nun nach, dass σ ein Hopfalgebrenisomorphismus ist. Dazu seien $a, b \in H^*$ und $h, l \in H$ beliebig.

- $\bar{\Delta}(\sigma(h))(a \otimes b) = \bar{h}(a \cdot b) = (a \cdot b)(h) = (a \otimes b)(\Delta(h)) = (\sigma \otimes \sigma)(\Delta(h))(a \otimes b)$
- $\bar{\varepsilon}(\sigma(h)) = \bar{h}(\varepsilon) = \varepsilon(h)$
- $\bar{S}(\sigma(h))(a) = (\bar{h} \circ S')(a) = S'(a)(h) = a(S(h)) = \sigma(S(h))(a)$
- $(\bar{m}(\sigma(h) \otimes \sigma(l)))\,(a) = (\bar{h} \otimes \bar{l})\,(\Delta'(a)) = \Delta'(a)(h \otimes l) = a(m(h \otimes l))$
  $= \sigma(m(h \otimes l))(a)$
- $\bar{n}(1)(a) = \varepsilon'(a) = a(n(1)) = \sigma(n(1))(a)$

Damit folgt:

- $\bar{\Delta} \circ \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \circ \Delta$
- $\bar{\varepsilon} \circ \sigma = \varepsilon$
- $\bar{S} \circ \sigma = \sigma \circ S$
- $\bar{m} \circ (\sigma \otimes \sigma) = \sigma \circ m$
- $\bar{n}(1) = \sigma(n(1))$ $\square$

In dem folgenden Satz wird dargestellt, wie sich bestimmte Eigenschaften von Algebren beim Dualisieren auf Eigenschaften der entstehenden Koalgebra übertragen lassen und umgekehrt.

2.1.8 Satz
Es sei C eine Koalgebra, C^* die duale Algebra, A eine endlich-dimensionale Algebra und A^* die duale Koalgebra.

1. Die Koalgebra C ist genau dann kokommutativ, wenn C^* kommutativ ist.

2. Die Algebra A ist genau dann kommutativ, wenn A^* kokommutativ ist.

3. Wenn R eine Unterkoalgebra von C ist, so ist $R^\perp := \{g^* \in C^* \mid g^*(R) = 0\}$ ein zweiseitiges Ideal von C^*. Ist umgekehrt I ein zweiseitiges Ideal von C^*, dann ist $I^\perp \subset C$ mit $I^\perp := \bigcap_{\alpha \in I} \operatorname{Kern} \alpha$ eine Unterkoalgebra. Weiter gilt $\left(R^\perp\right)^\perp = R$ für eine beliebige Unterkoalgebra R und $I \subset \left(I^\perp\right)^\perp$ für ein Ideal I von C^*.

4. Ist C endlich-dimensional, I ein zweiseitiges Ideal in C^* und $\bar{I}^\perp := \{g^{**} \in C^{**} \mid g^{**}(I) = 0\} \subset C^{**}$, dann gilt: $C \cong C^{**}$ und $I^\perp \cong \bar{I}^\perp$ als Koalgebren bezüglich des natürlichen Isomorphismus. Damit gilt auch $I = \left(I^\perp\right)^\perp$. Die Abbildung $\perp$ ist also eine Bijektion zwischen der Menge der Unterkoalgebren von C und der Menge der Ideale von C^*, so dass die Dimension einer Unterkoalgebra R gleich der Kodimension des zweiseiten Ideals $R^\perp$ ist.

5. Seien U und V zwei Unterkoalgebren der Koalgebra C mit $U \subset V$, dann ist $V^\perp \subset U^\perp$. Seien umgekehrt X und Y zwei Unteralgebren der Algebra A mit $X \subset Y$, dann ist $Y^\perp \subset X^\perp$.

Beweis:

1. Seien $g, f \in C^*$ und $x \in C$. Es gilt $(f \cdot g)(x) = (f \otimes g)(\Delta(x)) = (g \otimes f)(\tau\Delta(x))$, da k kommutativ ist. Ist C kokommutativ, dann gilt $(g \otimes f)(\tau\Delta(x)) = (g \otimes f)(\Delta(x)) = (g \cdot f)(x)$ für alle $x \in C$. Damit ist C^* kommutativ. Ist C^* kommutativ, dann gilt $(g \otimes f)(\tau\Delta(x)) = (g \otimes f)\Delta(x)$ für alle $g, f \in C^*$. Hieraus folgt $\Delta(x) = \tau\Delta(x)$ nach Lemma 2.1.3 und damit ist C kokommutativ.

2. Seien $x, y \in A$ und $g \in A^*$. Es gilt: $\Delta(g)(x \otimes y) = g(xy) = (\tau\Delta(g))(y \otimes x)$, da k kommutativ ist. Ist A kommutativ, dann gilt $\Delta(g)(x \otimes y) = \Delta(g)(y \otimes x) = (\tau\Delta(g))(y \otimes x)$ für alle $x, y \in A$. Damit ist $\Delta(g) = \tau\Delta(g)$ für alle $g \in A^*$. Also ist A^* kokommutativ. Ist umgekehrt A^* kokommutativ, dann ist $g(xy) = \tau\Delta(g)(y \otimes x) = \Delta(g)(y \otimes x) = g(yx)$ für alle $g \in A^*$. Hieraus folgt $xy = yx$ für alle $x, y \in A$ nach Lemma 2.1.3 und damit ist A kommutativ.

3. Es sei R eine Unterkoalgebra von C, $f \in R^\perp$ und $g \in C^*$. Dann ist $(f \cdot g)(r) = (f \otimes g)(\Delta(r)) = 0$ und $(g \cdot f)(r) = (g \otimes f)(\Delta(r)) = 0$ für alle $r \in R$, da $\Delta(r) \in R \otimes R$ ist. Also ist $f \cdot g$ und $g \cdot f \in R^\perp$. Somit ist $R^\perp$ ein zweiseitiges Ideal in C^*.

   Es sei umgekehrt I ein Ideal in C^* und $I^\perp = \bigcap_{\alpha \in I} \operatorname{Kern} \alpha$. Dann ist R ein Vektorraum. Es bleibt zu zeigen, dass $\Delta(I^\perp)$ in $I^\perp \otimes I^\perp$ liegt. Wir nehmen an, es existiere ein $x \in I^\perp$ mit $\Delta(x) \notin I^\perp \otimes C$. Es sei $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes z_i$, wobei die z_i o.B.d.A. als linear unabhängig angenommen werden können, und $x_1 \notin I^\perp$. Dann existieren $\alpha \in C^*$ und $\beta \in I$, so dass $\beta(x_1) \neq 0$, $\alpha(z_i) = \delta_{1,i}$ und damit $\sum_{j=1}^n \beta(x_i)\alpha(z_i) \neq 0$ ist.

Da I ein Ideal ist, gilt $\beta \cdot \alpha \in I$ und damit ist $0 = (\beta \cdot \alpha)(x) = (\beta \otimes \alpha)\Delta(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta(x_i)\alpha(z_i) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Somit muss $\Delta(x) \in I^\perp \otimes C$ gelten. Analog zeigt man, dass $\Delta(x) \in C \otimes I^\perp$ gilt. Damit ist $\Delta(x) \in I^\perp \otimes C \cap C \otimes I^\perp = I^\perp \otimes I^\perp$ nach Lemma 2.1.1 für alle $x \in I^\perp$.

Sei $r \in R$. Dann ist $g^*(r) = 0$ für alle $g^* \in R^\perp$, also ist $r \in \left(R^\perp\right)^\perp$. Ist umgekehrt $c \in C \setminus R$, dann existiert ein $g^* \in C^*$ mit $g^*(c) \neq 0$ und $g^*(R) = 0$. Also ist $g^* \in R^\perp$ und $c \notin \left(R^\perp\right)^\perp$. Damit gilt $R = \left(R^\perp\right)^\perp$. Sei I ein Ideal in C^*. Für alle $g^* \in I$ gilt $g^*(I^\perp) = 0$. Damit ist gezeigt, dass $I \subset (I^\perp)^\perp$ gilt.

4. Es sei $a \in C$ und $a^{**} \in C^{**}$ das Element des Bidualraums, auf das a durch den natürlichen Homomorphismus abgebildet wird. Da $a^{**}(f^*) = f^*(a)$ für alle $f^* \in C^*$ ist, gilt $a \in I^\perp$ genau dann, wenn $a^{**} \in \bar{I}^\perp$ ist. Sei $d \in \mathbb{N}$ die Dimension von C und $l \in \mathbb{N}$ die Dimension von I. Dann ist $\dim \bar{I}^\perp = d - l$. Damit ist $\dim I^\perp = d - l$ also $\dim \left(I^\perp\right)^\perp = d - (d - l) = l$. Da $I \subset \left(I^\perp\right)^\perp$ gilt, folgt aus Dimensionsgründen $I = \left(I^\perp\right)^\perp$.

5. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

2.1.9 Bemerkung

1. Sei C eine endlich-dimensionale Koalgebra. Eine Unterkoalgebra E von C ist genau dann einfach, wenn $E^\perp$ ein maximales zweiseitiges Ideal in C^* ist. Umgekehrt entspricht jedes maximale zweiseitige Ideal I in C^* einer einfachen Unterkoalgebra $I^\perp$.

2. Sei C eine endlich-dimensionale Koalgebra. Es sei I eine Indexmenge und $C_i \subset C$ Unterkoalgebren von C für alle $i \in I$. Sei $R = \sum_{i \in I} C_i$. Dann ist $R^\perp = \bigcap_{i \in I} C_i{}^\perp$. Ist R die Summe der einfachen Unterkoalgebren in C, dann ist $R^\perp$ der Schnitt der maximalen zweiseitigen Ideale.

3. Sei C eine Koalgebra und I eine Indexmenge, so dass $\{C_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Unterkoalgebren ist. Dann ist $\bigcap_{i \in I} C_i$ eine Unterkoalgebra von C.

Beweis:

1. Die Abbildung $\perp$ ist nach Satz 2.1.8, Teil 5 inklusionsumkehrend. Es sei E eine einfache Unterkoalgebra und I ein echtes zweiseitiges Ideal in C^*, das $E^\perp$ enthält. Dann ist $\{0\} \neq I^\perp$ nach Satz 2.1.8, Teil 5 in $E = (E^\perp)^\perp$ enthalten. Da E einfach ist, ist $I^\perp = E$, also ist $I = (I^\perp)^\perp = E^\perp$. Damit ist $E^\perp$ ein maximales zweiseitiges Ideal.

   Es sei $E^\perp$ ein maximales zweiseitiges Ideal und D eine nicht-triviale Unterkoalgebra, die in E enthalten ist. Dann ist $E^\perp \subset D^\perp$ nach Teil 5 von Satz 2.1.8. Da D nicht-trivial ist, ist $D^\perp \neq C^*$. Da $E^\perp$ maximal ist, gilt $E^\perp = D^\perp$ und damit $E = (E^\perp)^\perp = (D^\perp)^\perp = D$. Also ist E eine einfache Unterkoalgebra.

   Sei I ein maximales zweiseitiges Ideal von C^*. Dann ist $I^\perp \neq \{0\}$ eine Unterkoalgebra mit $I = (I^\perp)^\perp$, also nach Teil 1 einfach.

2. Nach Definition ist $R^\perp = \{f \in C^* \mid f(R) = 0\} = \{f \in C^* \mid f(C_i) = 0 \text{ für alle } i \in I\} = \bigcap_{i \in I}\{f \in C^* \mid f(C_i) = 0\} = \bigcap_{i \in I} C_i^\perp$. Die 2. Behauptung folgt damit aus Punkt 1.

3. $I := \sum_{i\in I} C_i^\perp$ ist ein zweiseitiges Ideal, also ist $I^\perp$ eine Unterkoalgebra von C. Es gilt

$$I^\perp = \left(\sum_{i\in I} C_i^\perp\right)^\perp = \bigcap_{i\in I} (C_i^\perp)^\perp = \bigcap_{i\in I} C_i,$$

wenn man im letzten Schritt Satz 2.1.8, Teil 4 benutzt. Damit ist der Schnitt beliebig vieler Unterkoalgebren wieder eine Unterkoalgebra. □

2.2 Hopfmoduln

Hier werden Moduln mittels Abbildungen zwischen Tensor-Produkten beschrieben. Durch Dualisieren von Moduln erhält man Komoduln. Einen Vektorraum, der Modul und Komodul einer Hopfalgebra ist, und dessen Komodulstruktur mit seiner Modulstruktur verträglich ist, nennt man Hopfmodul. Der Fundamentalsatz über Hopfmoduln, welcher Hopfmoduln nach ihrem Isomorphietyp klassifiziert, wird hergeleitet.

2.2.1 Definition

- Es sei C eine k-Koalgebra. Ein k-Vektorraum M ist ein **Rechtskomodul** von C, falls eine lineare Abbildung $\rho \in \mathrm{Hom}_k(M, M \otimes C)$ existiert, so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\rho\otimes \mathrm{id}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

- Seien M und N zwei Rechtskomoduln einer Koalgebra C. Eine lineare Abbildung $f : M \to N$ heißt **Komodulmorphismus**, falls folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"] \\ N \arrow[r, "\rho_N"'] & N \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

$$\rho_N \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_M.$$

- Es sei H eine Hopfalgebra über k und M ein H-Rechtskomodul via einer Abbildung ρ, und ein H-Rechtsmodul. Dann ist $M \otimes H$ ein H-Rechtsmodul mit der Verknüpfung $(m \otimes \bar{h}) * h := (m \otimes \bar{h}) \cdot \Delta(h)$ für alle $h, \bar{h} \in H$ und alle $m \in M$. Ist ρ ein H-Modulhomomorphismus zwischen M und $M \otimes H$ mit der obigen Verknüpfung, so nennt man M einen **Rechtshopfmodul** von H.

- Seien M und N zwei Rechtshopfmoduln einer Hopfalgebra H. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Hopfmodulmorphismus**, falls f ein Komodul- und ein Modulhomomorphismus ist.

- Es sei M ein Rechtshopfmodul einer Hopfalgebra H. Die Elemente der Menge

$$M^{KoH} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$$

heißen **Koinvarianten** von H in M.

2.2.2 Bemerkung
Es sei H eine Hopfalgebra und V ein Vektorraum. Es gilt:

1. $V \otimes H$ ist ein H-Rechtsmodul mit der Verknüpfung $(v \otimes \bar{h}) \cdot h := v \otimes \bar{h}h$ für alle $\bar{h}, h \in H$ und $v \in V$.

2. $V \otimes H$ ist ein H-Rechtskomodul mit der Abbildung

$$\rho : V \otimes H \to V \otimes H \otimes H, \quad \rho := \mathrm{id} \otimes \Delta.$$

3. $V \otimes H$ ist ein H-Hopfmodul mit den in 1. und 2. beschriebenen Strukturen.

Der folgende Satz beweist, dass alle Hopfmoduln bis auf Isomorphie eine wie in Bemerkung 2.2.2 beschriebenen Form haben.

2.2.3 Satz (Fundamentalsatz über Hopfmoduln, siehe [Swe69, 4.1.1])
Es sei H eine Hopfalgebra und M ein H-Rechtshopfmodul mittels $\rho : M \to M \otimes H$. Dann ist $M^{KoH} \otimes H$ ein H-Rechtshopfmodul wie in Bemerkung 2.2.2 beschrieben. Die Abbildung

$$f : M^{KoH} \otimes H \to M, \; m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

ist ein Hopfmodulisomorphismus.
Also ist M ein freier H-Modul der Dimension $\dim_k M^{KoH}$.

Beweis: Es sei $e : M \otimes H \to M, \; m \otimes h \mapsto mh$ und $p : M \to M, \; p := e \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \rho$. Wir zeigen zunächst, dass $p(M)$ in der Menge M^{KoH} enthalten ist. Es sei

1. $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$,

2. $[(\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho](m) = [(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho](m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}$,

3. $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}) = (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} \otimes m_{(3)}$.

Mit dieser Schreibweise ist $p(m) = m_{(0)}S(m_{(1)})$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(p(m)) &= \rho(m_{(0)}S(m_{(1)})) \\
&= (m_{(0)} \otimes m_{(1)})\Delta(S(m_{(2)}))[\text{ weil } \rho \text{ ein Modulhomomorphismus ist }] \\
&= m_{(0)}S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)}S(m_{(2)})[\text{Definition der } H \otimes H\text{-Modulstruktur auf } M \otimes H, \\
&\quad \text{und } S \text{ ist Antikoalgebrenmorphismus}] \\
&= m_{(0)}S(m_{(2)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)})[1.2.8, \text{Teil3}] \\
&= m_{(0)}S(m_{(2)}\varepsilon(m_{(1)})) \otimes 1 \\
&= m_{(0)}S(m_{(1)}) \otimes 1[1.2.8, \text{Teil2}] \\
&= p(m) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Also ist $p(m)$ koinvariant für alle $m \in M$. Somit ist die Abbildung $g : M \to M^{KoH} \otimes H$ mit $g := (p \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$ wohldefiniert. Wir zeigen, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f \circ g &= e \circ ((e \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \rho) \otimes \mathrm{id}) \circ \rho \\
&= e \circ ((e \circ (\mathrm{id} \otimes S)) \otimes \mathrm{id}) \circ (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho \\
&= e \circ ((e \circ (\mathrm{id} \otimes S)) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho \quad \text{[da } M \text{ ein } H\text{-Komodul ist]} \\
&= e \circ (\mathrm{id} \otimes (m \circ (S \otimes \mathrm{id}))) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho \; \text{[nach dem Assoziativgesetz für Moduln]} \\
&= e \circ (\mathrm{id} \otimes (n \circ \varepsilon)) \circ \rho \quad \text{[mit der Antipoden-Eigenschaft von } H\text{]} \\
&= \mathrm{id}\,. \qquad \text{[mit der Koeins-Eigenschaft von M]}
\end{aligned}$$

Hiermit ist $f \circ g = \mathrm{id}$ gezeigt. Weiter gilt für $m \in M^{KoH}$, $h \in H$:

$$\begin{aligned}
g \circ f(m \otimes h) &= g(mh) = (p \otimes \mathrm{id})(\rho(mh)) \\
&= (p \otimes \mathrm{id})[(m \otimes 1)\Delta(h)]\text{[Weil } m \in M^{KoH} \text{ und} \\
&\quad \rho \text{ ein Modulhomomorphismus ist]} \\
&= (p \otimes \mathrm{id})(mh_{(1)} \otimes h_{(2)})[H \otimes H\text{-Modulstruktur auf } M \otimes H\ ] \\
&= e \circ (\mathrm{id} \otimes S)[\rho(m)\Delta(h_{(1)})] \otimes h_{(2)}\text{[Weil } \rho \text{ ein Modulhomomorpismus ist]} \\
&= mh_{(1)} \cdot S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)}\text{[Weil } m \in M^{KoH} \text{ ist]} \\
&= m\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\text{[Wegen der Antipoden-Eigenschaft]} \\
&= m \otimes \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= m \otimes h\text{[Wegen der Koeins-Eigenschaft]}
\end{aligned}$$

Hiermit ist $g \circ f = \mathrm{id}$ gezeigt. Somit ist f bijektiv. Da f ein Modul und Komodulisomorphismus ist, gilt dies auch für g. Also ist f ein Hopfmodulisomorphismus. □

Kapitel 3

Struktur endlich-dimensionaler Hopfalgebren

3.1 Kokommutative Hopfalgebren

Ziel des Kapitels ist es, einen Struktursatz für kokommutative, endlich-dimensionale Hopfalgebren und daraus folgende hinreichende Kriterien dafür, dass kokommutative, endlich-dimensionale Hopfalgebren Gruppenalgebren sind, herzuleiten. Hierzu werden einige Begriffe zur Charakterisierung von Koalgebren und daraus folgende wichtige Eigenschaften hergeleitet.

3.1.1 Definition
Es sei C eine Koalgebra.

- Eine Koalgebra C heißt **kohalbeinfach**, falls C die direkte Summe von einfachen Unterkoalgebren ist.
- Man nennt C **irreduzibel**, falls je zwei nicht-triviale Unterkoalgebren einen Schnitt ungleich $\{0\}$ haben.
- Die Koalgebra C heißt **punktiert**, falls alle einfachen Unterkoalgebren 1-dimensional sind.
- Eine irreduzible Unterkoalgebra E, für die gilt, dass jede Unterkoalgebra von C, die E echt enthält, nicht irreduzibel ist, nennt man eine **irreduzible Komponente (IC)**.

3.1.2 Satz
Es sei $H \neq 0$ eine endlich-dimensionale, kokommutative, kohalbeinfache Hopfalgebra über einem Körper k, der ein Zerfällungskörper von H^* ist. Dann ist $H = kG(H)$.

Beweis: Sei $H = C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ für einfache Koalgebren C_i. Dann sind die C_i^* nach Bemerkung 2.1.9 einfache Algebren. Es ist $H^* \cong C_1^* \oplus \cdots \oplus C_n^*$ als Algebra. Also ist H^* halbeinfach. Die duale Hopfalgebra H^* ist kommutativ nach Satz 2.1.8 Teil 1, endlich-dimensional und halbeinfach. Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist $H^* \cong k \oplus \cdots \oplus k$ als Algebra. Nach Satz 2.1.6 sind die gruppen-ähnlichen Elemente von H^{**} genau die Algebrenhomomorphismen von H^* nach k. Die Algebra H^* besitzt genau $\dim H^* = \dim H$ solche Algebrenhomomorphismen, also besitzt H^{**} genau $\dim H$ gruppen-ähnliche Elemente. Da nach Satz 2.1.7 $H \cong H^{**}$ als Hopfalgebren gilt, besitzt auch H genau $\dim H$ gruppen-ähnliche Elemente. Diese sind linear unabhängig nach Teil 3 von Satz 1.2.14. Also gilt $H = kG(H)$. $\square$

Umgekehrt ist jede Gruppenalgebra kG mit trivialer Hopfalgebrenstruktur kokommutativ und kohalbeinfach, da sie darstellbar ist als direkte Summe der einfachen Unterkoalgebren kg mit $g \in G$. Hier werden einige Hilfssätze aufgezählt, die in der Folge benötigt werden.

3.1.3 Lemma (siehe [Swe69, 8.0.1, 8.0.3, 8.0.5])

1. Jede von einem Element c erzeugte Koalgebra, d.h. der Schnitt aller Unterkoalgebren, die c enthalten, ist endlich-dimensional, also auch jede einfache Koalgebra.

2. Jede nicht-triviale Koalgebra enthält eine einfache Unterkoalgebra.

3. Eine Koalgebra $C \neq \{0\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn C genau eine einfache Unterkoalgebra besitzt.

4. Ist k ein Zerfällungskörper für alle Algebren E^*, die durch Dualisieren aus einfachen Unterkoalgebren E von C entstehen und ist C kokommutativ, dann ist C punktiert. Insbesondere ist jede kokommutative Koalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper punktiert.

5. Es sei I eine Indexmenge und C die Summe von Unterkoalgebren C_a mit $a \in I$. Dann liegt jede einfache Unterkoalgebra von C in einem C_a. Weiter ist C genau dann irreduzibel, wenn alle C_a irreduzibel und $\bigcap_{a \in I} C_a$ nicht leer ist.

6. Jede irreduzible Unterkoalgebra E von C ist in einer irreduziblen Komponente enthalten.

7. Die Summe aller irreduziblen Komponenten einer Koalgebra ist direkt.

8. Ist C kokommutativ, dann ist C gleich der direkten Summe ihrer irreduziblen Komponenten.

Beweis:

1. Nach Bemerkung 2.1.9, Teil 3 ist der Schnitt von Unterkoalgebren wieder eine Unterkoalgebra. Also ist die von einem Element erzeugte Unterkoalgebra wohldefiniert. Für den zweiten Teil der Behauptung siehe [Swe69, 2.2.1].

2. Es sei C eine Koalgebra und c ein Element von C. Die von c erzeugte Unterkoalgebra ist endlich-dimensional und besitzt daher eine einfache Unterkoalgebra.

3. Seien D und E zwei verschiedene einfache Unterkoalgebren von C. Dann ist $D \cap E$ eine Unterkoalgebra von D. Da D einfach ist, muss $D \cap E = \{0\}$ gelten. Somit ist C nicht irreduzibel.

   Ist C nicht irreduzibel, dann existieren zwei nicht-triviale Unterkoalgebren F und G mit Schnitt $\{0\}$. Da nach 2. jede Unterkoalgebra eine einfache Unterkoalgebra enthält, besitzt C mindestens zwei verschiedene einfache Unterkoalgebren.

4. Es sei E eine einfache Unterkoalgebra von C. Dann ist E endlich-dimensional nach 1. Da $\dim E^* = \dim E$ gilt, ist auch E^* endlich-dimensional. Da E eine einfache, kokommutative Unterkoalgebra ist, besitzt E^* nach Bemerkung 2.1.9 keine Ideale, ist also eine kommutative, einfache Algebra. Da k ein Zerfällungskörper von E^* ist, gilt nach dem Satz von Artin-Wedderburn $E^* \cong k$. Damit ist $\dim E = 1$.

5. Es sei E eine einfache Unterkoalgebra von C. Da E endlich-dimensional ist, existieren endlich viele C_α, so dass E in ihrer Summe enthalten ist. Man kann also o.B.d.A. $E \subset C_\alpha + C_\beta$ annehmen. Die Koalgebra C ist ein C^*-Linksmodul via $c^* \cdot d := (\mathrm{id} \otimes c^*)(\Delta(d))$ für alle $c^* \in C^*$ und für alle $d \in C$. Angenommen $E \not\subset C_\beta$. Dann ist $E \cap C_\beta = \{0\}$. Es existiert also ein $c^* \in C^*$ mit der Eigenschaft $c^*|_E = \varepsilon|_E$ und $c^*(C_\beta) = 0$. Damit ist $c^* \cdot d = d$ für alle $d \in E$. Da $\Delta(E) \subset C_\alpha \otimes C_\alpha + C_\beta \otimes C_\beta$ gilt und $c^*(C_\beta) = 0$ ist, folgt $d = c^* \cdot d = (\mathrm{id} \otimes c^*)(\Delta(d)) \in C_\alpha$ für alle $d \in E$. Damit ist $E \subset C_\alpha$.

   Es sei C irreduzibel. Dann besitzt C nach 3. genau eine einfache Unterkoalgebra R. Da jede Unterkoalgebra C_a nach 2. eine einfache Unterkoalgebra besitzt, ist R in allen C_a enthalten. Somit ist R auch in $\bigcap_a C_a$ enthalten. Da R die einzige einfache Unterkoalgebra der C_a ist, sind diese nach 3. irreduzibel.

   Seien alle C_a irreduzibel und $\bigcap_a C_a$ nicht leer. Nach 2. existiert eine einfache Koalgebra R, die in allen C_a enthalten ist. Da die C_a irreduzibel sind, ist R nach 3. die einzige einfache Unterkoalgebra der C_a. Da alle einfachen Unterkoalgebren von C in einem C_a enthalten sind, ist R die einzige einfache Unterkoalgebra von C, also ist auch C nach 3. irreduzibel.

6. Es sei E eine irreduzible Unterkoalgebra von C. Es sei D die Summe aller irreduziblen Unterkoalgebren, die E enthalten, dann ist D nach 5. irreduzibel und nach Konstruktion maximal, also eine Komponente, die E enthält.

7. Seien I und $\bar{I}$ zwei verschiedene, irreduzible Komponenten. Es sei A die einzige einfache Unterkoalgebra von I und $\bar{A}$ die einzige einfache Unterkoalgebra von $\bar{I}$. Angenommen $I \cap \bar{I} \neq \{0\}$. Dann enthält $I \cap \bar{I}$ eine einfache Unterkoalgebra nach Punkt 2. Damit ist entweder $A \subset I \cap \bar{I}$ oder $\bar{A} \subset I \cap \bar{I}$. Da sowohl I als auch $\bar{I}$ genau eine einfache Unterkoalgebra besitzen, folgt $A = \bar{A}$. Dann ist aber $I + \bar{I}$ nach Punkt 5 eine größere irreduzible Unterkoalgebra von C, da sowohl I als auch $\bar{I}$ irreduzibel sind und A in ihrem Schnitt enthalten ist. Dies liefert einen Widerspruch. Also ist die Summe zweier irreduzibler Komponenten direkt. Sei J eine Indexmenge und $A, A_j,\ j \in J$ paarweise verschiedene, irreduzible Komponenten. Angenommen $A \cap \sum_{j \in J} A_j$ ist nicht-trivial. Dann existiert eine einfache Unterkoalgebra $U \subset A \cap \sum_{j \in J} A_j$. Nach Teil 5 gilt $U \subset A_j$ für ein $j \in J$. Dann ist aber $U \subset A \cap A_j$, im Widerspruch zum ersten Teil des Beweises. Die Summe beliebiger irreduzibler Komponenten ist also direkt.

8. Wegen 6. und 7. genügt es zu zeigen, dass jedes Element $c \in C$ in einer Summe irreduzibler Unterkoalgebren enthalten ist. Sei $\bar{C}$ die von c erzeugte Unterkoalgebra. Dann ist $\bar{C}$ endlich-dimensional. Wir können also o.B.d.A. annehmen, C sei endlich-dimensional, indem wir C durch $\bar{C}$ ersetzen. Da C eine endlich-dimensionale kokommutative Koalgebra ist, ist C^* eine endlich-dimensionale kommutative Algebra. Damit ist C^* artinsch. Es sei $C^* = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ eine Darstellung von C^* als Summe unzerlegbarer Unteralgebren. Es bleibt zu zeigen, dass die A_i's lokal sind für alle $i = 1, \ldots, n$, denn eine kommutative Algebra ist genau dann lokal, wenn die duale Koalgebra irreduzibel ist nach Bemerkung 2.1.9 und Teil 3 von 3.1.3. Angenommen es existiert ein $A := A_i$, das nicht lokal ist. Es sei $J(A)$ das Jacobson-Radikal von A und $^- : A \to A/J(A)$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\bar{A} := A/J(A)$ halbeinfach und nicht einfach nach [CR90, 5.22]. Also ist $\bar{A}$ zerlegbar. Damit ist aber

auch A zerlegbar im Widerspruch zur Annahme. Die A_i sind also lokal. Damit ist $C \cong C^{**} = {A_1}^* \oplus \cdots \oplus {A_n}^*$, wobei die ${A_i}^*$ für alle $1 \leq i \leq n$ irreduzible Unterkoalgebren sind. □

3.1.4 Satz ([Swe69, 8.0.8])
Es sei C eine irreduzible, kokommutative Koalgebra mit einfacher Unterkoalgebra R, E eine kokommutative, nicht-triviale Koalgebra und $f : C \to E$ ein surjektiver Koalgebrenmorphismus. Dann gilt:

1. Die Unterkoalgebra $f(R)$ enthält alle einfachen Unterkoalgebren von E. Da jede Koalgebra ungleich $\{0\}$ eine einfache Unterkoalgebra besitzt, ist $f(R)$ insbesondere ungleich $\{0\}$.

2. Die Koalgebra E ist genau dann irreduzibel, wenn $f(R)$ irreduzibel ist.

3. Ist C irreduzibel und punktiert, dann auch E.

Beweis:

1. Nach der Definition des Koalgebrenmorphismus 1.2.9 ist

$$\Delta_E(f(R)) \subset (f \otimes f)(\Delta_C(R)) \subset (f \otimes f)(R \otimes R) \subset f(R) \otimes f(R).$$

Also ist $f(R)$ eine Unterkoalgebra. Zuerst beweisen wir, dass wir o.B.d.A. annehmen können, C und E seien endlich-dimensional. Dazu wählen wir eine einfache Unterkoalgebra F von E, ein $0 \neq d \in F$ und ein $c \in C$ mit $f(c) = d$. Dann ist die von c erzeugte Unterkoalgebra Y endlich-dimensional nach 3.1.3, Teil 1. Es gilt $R \subset Y$, nach 3.1.3, Teil 2 und Y ist irreduzibel nach Teil 3 von 3.1.3, da C irreduzibel ist. Weiter ist auch $f(Y)$ endlich-dimensional. Es ist $f(Y) \cap F \neq \{0\}$, also $f(Y) \cap F = F$, da F einfach ist. Ersetzt man also C durch Y und E durch $f(Y)$, dann sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Es sei $f^* : E^* \to C^*$ die zu f duale Abbildung, d.h. es gilt $f^*(e^*) = e^* \circ f$ für alle $e^* \in E^*$. Da f ein surjektiver Koalgebrenmorphismus ist, ist f^* ein injektiver Algebrenhomomorphismus. Da R die einzige einfache Unterkoalgebra von C ist, folgt aus Bemerkung 2.1.9, dass C^* ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $R^\perp$ ist. Also ist $R^\perp$ gleich dem Jacobson-Radikal. Da C endlich-dimensional ist, ist $R^\perp$ nilpotent. Damit existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(R^\perp)^n = 0$. Es sei $N := (f^*)^{-1}(R^\perp) = \{e^* \in E^* \mid (e^* \circ f)(R) = 0\} = f(R)^\perp$. Dann ist N ein Ideal in E^* und $N^n = 0$, da f^* injektiv ist. Also ist N nilpotent und damit im Radikal J von E^* enthalten. Da jede einfache Unterkoalgebra von E in $J^\perp$ enthalten ist, ist sie nach 2.1.8, Teil 5 auch in $N^\perp$ enthalten. Es gilt aber $N^\perp = ((f^*)^{-1}(R^\perp))^\perp = (f(R)^\perp)^\perp = f(R)$ und hiermit die Behauptung.

2. Die Koalgebra E ist genau dann irreduzibel, wenn sie genau eine einfache Unterkoalgebra besitzt. Da nach 2. alle einfachen Unterkoalgebren in $f(R)$ enthalten sind, ist E genau dann irreduzibel, wenn $f(R)$ nur genau eine Unterkoalgebra besitzt, also genau dann, wenn $f(R)$ irreduzibel ist.

3. Ist C irreduzibel und punktiert, dann ist R eindimensional, also auch $f(R)$. Aus 2. folgt, dass $f(R)$ die einzige einfache Unterkoalgebra von E ist. Somit ist E irreduzibel und punktiert. □

3.1.5 Satz (siehe [Swe69, 8.0.10])
Es seien C und E zwei irreduzible, kokommutativer Koalgebren und R bzw. S ihre einfachen Unterkoalgebren.

1. Die Unterkoalgebra $R \otimes S$ enthält alle einfachen Unterkoalgebren von $C \otimes E$.

2. $C \otimes E$ ist genau dann irreduzibel, wenn $R \otimes S$ irreduzibel ist.

3. Sei R eindimensional, also C punktiert. Dann ist $C \otimes E$ irreduzibel mit einziger einfacher Unterkoalgebra $R \otimes S$.

Beweis:

1. Wir zeigen zunächst, dass man o.B.d.A. C und E als endlich-dimensional annehmen kann. Dazu sei X eine einfache Unterkoalgebra von $C \otimes E$, $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes e_i \in X$ und $\bar{C}$ bzw. $\bar{E}$ die von c_i's bzw. e_i's erzeugten Unterkoalgebren. Diese sind endlich-dimensional nach Teil 1 von 3.1.3 und es gilt: $R \subset \bar{C}$ bzw. $S \subset \bar{E}$. Die Unterkoalgebra $\bar{X} := X \cap (\bar{C} \otimes \bar{E})$ ist nicht-trivial, denn es ist $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes e_i \in \bar{X}$. Da X einfach ist, gilt $X = \bar{X}$. Ersetzt man E durch $\bar{E}$, C durch $\bar{C}$, dann sind alle Voraussetzungen erfüllt.

   Seien also C und E endlich-dimensional. Es sind $R^{\perp}$ und $S^{\perp}$ die einzigen maximalen Ideale von C^* bzw. E^*. Da das Jacobson-Radikal nilpotent ist, existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $(R^{\perp})^n = 0$ und $(S^{\perp})^m = 0$. Dann ist auch $P := R^{\perp} \otimes E^* + C^* \otimes S^{\perp}$ nilpotent, denn es gilt $P^{n+m} \subset \sum_{i=0}^{n+m} (R^{\perp})^i \otimes (S^{\perp})^{n-i} = 0$. Also liegt P im Radikal von $C^* \otimes E^*$ und somit in jedem maximalen Ideal von $C^* \otimes E^*$. Da $C^* \otimes E^*$ und $(C \otimes E)^*$ nach Bemerkung 2.1.5 als Algebren isomorph sind, lässt sich 2.1.9 und 2.1.8, Teil 5 anwenden. Damit sind alle einfachen Unterkoalgebren X von $C \otimes E$ in $P^{\perp}$ enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass $P^{\perp} = R \otimes S$ ist. Da $P(r \otimes s) = 0$ für alle $r \in R$, $s \in S$ gilt, ist $R \otimes S \subset P^{\perp}$. Ist $x \notin R \otimes S$, dann hat x o.B.d.A. eine Darstellung der Form $x = \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{t} r_j \otimes s_j$ mit $r_j \in R$ für alle $1 \leq j \leq t$ und linear unabhängigen $x_i + R$ in C/R. Sei $x^* \in R^{\perp}$ mit $x^*(x_i) = \delta_{i,1}$ und $y^* \in E^*$ mit $y^*(y_1) = 1$. Dann ist $x^* \otimes y^* \in P$ und $(x^* \otimes y^*)(x) = 1$. Daraus folgt $x \notin P^{\perp}$ und $P^{\perp} = R \otimes S$.

2. $C \otimes E$ ist genau dann irreduzibel, wenn $C \otimes E$ genau eine einfache Unterkoalgebra besitzt. Da jede einfache Unterkoalgebra in $R \otimes S$ enthalten ist, gilt dies genau dann, wenn $R \otimes S$ irreduzibel ist.

3. Da R eindimensional ist und S einfach, ist auch $R \otimes S \cong S$ einfach.

□

3.1.6 Lemma
Es sei H eine kokommutative Hopfalgebra und $g \in G(H)$. Da kg einfach und somit irreduzibel ist, ist kg nach Lemma 3.1.3, Teil 6 in einer irreduziblen Komponente enthalten. Mit H^g bezeichnen wir die irreduzible Komponente, die kg enthält. Sind $g, h \in G(H)$, dann ist $H^g H^h \subset H^{gh}$ und H^1 ist eine Unterhopfalgebra.

Beweis: Die Unterkoalgebra kg ist eindimensional, also einfach. Da H^g irreduzibel ist, ist kg die einzige einfache Unterkoalgebra und damit ist H^g punktiert. Mit derselben Argumentation ist auch H^h punktiert. Die Koalgebra $H^g \otimes H^h$ ist also nach Satz 3.1.5, Teil 3 irreduzibel mit der einfachen Unterkoalgebra $kg \otimes kh$ und damit auch punktiert. Da Δ ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt $\Delta(H^g H^h) = \Delta(H^g)\Delta(H^h) \subset (H^g \otimes H^g)(H^h \otimes H^h) = H^g H^h \otimes$

$H^g H^h$. Also ist $H^g H^h$ eine Koalgebra. Die Abbildung $f : H^g \otimes H^h \to H^g H^h,\ h \otimes g \mapsto hg$ ist ein surjektiver Koalgebrenmorphismus, denn die Multiplikation auf H ist nach 1.2.10 ein Koalgebrenmorphismus. Nach Satz 3.1.4, Teil 3 ist $H^g H^h$ irreduzibel. Da $gh \in H^g H^h$, folgt aus der Definition der irreduziblen Komponente, dass $H^g H^h \subset H^{gh}$ ist. Hiermit ist insbesondere gezeigt, dass H^1 multiplikativ abgeschlossen ist, also eine Unteralgebra von H ist. Es bleibt zu zeigen, dass $S(H^1) \subset H^1$ gilt. Mit H^1_τ bezeichnen wir die Koalgebra $(H^1, \tau \circ \Delta, \varepsilon)$. Die Antipode $S : H^1 \to H$ ist ein Antikoalgebrenmorphismus nach Satz 1.2.12, also ist $S : H^1_\tau \to H$ ein Koalgebrenmorphismus. Da H^1_τ eine punktierte, irreduzible Koalgebra ist, ist $S(H^1_\tau) = S(H^1)$ irreduzibel. Weiter gilt $1 \in S(H^1)$, da $S(1) = 1$ ist. Damit folgt $S(H^1) \subset H^1$. Also ist H^1 ist eine Unterhopfalgebra. □

3.1.7 Bemerkung (vgl. [Swe69, 8.1.2, 8.1.3])
Es sei H eine kokommutative, punktierte Hopfalgebra und $G(H)$ die Menge der gruppenähnlichen Elemente. Dann gilt:

- $H = \bigoplus_{g \in G(H)} H^g$
- H ist ein $kG(H)$-Hopfmodul.
- Die Abbildung $\varphi : H^1 \otimes kG(H) \to H,\ h \otimes g \mapsto hg$ ist ein Hopfmodulisomorphismus.

Beweis:

- Da H punktiert ist, sind alle einfachen Unterkoalgebren eindimensional. Die eindimensionalen, einfachen Unterkoalgebren entsprechen eineindeutig den gruppen-ähnlichen-Elementen. Da H kokommutativ ist, ist H nach Satz 3.1.3, Teil 8 darstellbar als direkte Summe seiner irreduziblen Komponenten. Es gilt also $H = \bigoplus_{g \in G(H)} H^g$.

- Es sei $\pi_g : H^g \to kg,\ h \mapsto \varepsilon(h)g$. Da ε ein Koalgebrenmorphismus ist, gilt:

  $$(\pi_g \otimes \pi_g)(\Delta(h)) = ((\varepsilon \otimes \varepsilon)\Delta(h)) \cdot (g \otimes g) = (\varepsilon(h)(1 \otimes 1))(g \otimes g) = \Delta(\varepsilon(h)g) = \Delta(\pi_g(h))$$

  und da ε ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt

  $$\varepsilon(h) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) = \varepsilon(hg) = \varepsilon(\varepsilon(h)g) = \varepsilon(\pi_g(h))$$

  für alle $h \in H^g$. Also ist π_g ein Koalgebrenmorphismus und damit auch

  $$\pi := \bigoplus_{g \in G(H)} \pi_g : H \to kG(H).$$

  Definiere $\psi : H \to H \otimes kG(H), \psi := (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta$. Dann ist H mittels ψ ein $kG(H)$-Rechtskomodul, denn für jedes $h \in H^g$ gilt $\psi(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes \varepsilon(h_{(2)})g = h \otimes g$. Damit ist

  $$(\psi \otimes \mathrm{id})\psi(h) = h \otimes g \otimes g = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\psi(h), \text{ sowie } (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\psi(h)) = h \otimes \varepsilon(g) = h \otimes 1$$

  für alle $h \in H^g$. Die Hopfalgebra H ist ein $kG(H)$-Rechtsmodul mit der Abbildung $m : H \otimes kG(H) \to H,\ h \otimes g \mapsto h \cdot g$. Die Abbildung ψ ist ein $kG(H)$-Modulhomomorphismus, denn für alle $g, \bar{g} \in G(H)$ und für jedes $h \in H^g$ ist $h\bar{g} \in H^{g\bar{g}}$ und damit $\psi(h\bar{g}) = h\bar{g} \otimes g\bar{g} = \psi(h)\Delta(\bar{g}) = \psi(h) * \bar{g}$. Also ist H ein $kG(H)$-Hopfmodul nach Definition 2.2.1.

- Die Koinvarianten von H als $kG(H)$-Komodul sind genau die Elemente aus H^1, denn
$$\psi(H^g) = H^g \otimes g.$$
Nach dem Fundamentalsatz für Hopfmoduln ist $\varphi : H^1 \otimes kG \to H,\ h \otimes g \mapsto hg$ ein Hopfmodulisomorphismus. □

3.1.8 Lemma
Es sei $(H, m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ eine kokommutative Hopfalgebra, $G := G(H)$ die Gruppe der gruppen-ähnlichen Elemente und H^1 die irreduzible Komponente, die $k1$ enthält. Dann ist die Abbildung $m : H^1 \otimes kG \otimes H^1 \otimes kG \to H^1 \otimes kG$ mit $h \otimes g \otimes h' \otimes g' \mapsto hgh'g^{-1} \otimes gg'$ für alle $h, h' \in H^1,\ g, g' \in G$ k-linear fortgesetzt, wohldefiniert und eine Multiplikation auf $H^1 \otimes kG$. Mit der Koalgebrenstruktur aus 1.2.6 und der Antipode $S : H^1 \otimes kG \to H^1 \otimes kG,\ h \otimes g \mapsto g^{-1}S'(h)g \otimes S'(g)$ für alle $g \in G$, $h \in H^1$ und der oben definierten Multiplikation ist $H^1 \otimes kG$ eine Hopfalgebra. Im Folgenden wird die Algebra $(H^1 \otimes kG, m)$ mit $H^1 \rtimes kG$ bezeichnet.

Beweis: Zeige m ist wohldefiniert:
Da $gH^1g^{-1} \subset H^g H^1 H^{g^{-1}} \subset H^1$ nach Lemma 3.1.6 für alle $g \in G$ gilt, ist $hgh'g^{-1} \otimes gg' \in H^1 \otimes kG$ für alle $h, h' \in H^1,\ g, g' \in G$. Es sei $(h_i)_{i \in I}$ eine Basis von H^1 und $(g)_{g \in G}$ eine Basis von kG. Dann ist die Abbildung $m' : H^1 \otimes kG \otimes H^1 \otimes kG \to H^1 \otimes kG$ mit $h_l \otimes g \otimes h_k \otimes z \mapsto h_l g h_k g^{-1} \otimes gz$ für alle $g, z \in G$ und $l, k \in I$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung. Man rechnet nach, dass für alle $g, g' \in G$ und $h, h' \in H^1$ gilt $m'(h \otimes g \otimes h' \otimes g') = hgh'g^{-1} \otimes gg'$. Also ist $m = m'$ und damit ist m eine wohldefinierte lineare Abbildung. Die Assoziativität folgt durch direktes Nachrechnen auf den Basis-Elementen.
Zeige, dass Δ und ε Algebrenhomomorphismen sind:
Seien $g, g' \in G$ und $h, h' \in H^1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Delta((h \otimes g) \cdot (h' \otimes g')) &= \Delta\left(hgh'g^{-1} \otimes gg'\right) \\
&= \sum_{(hgh'g^{-1})} (hgh'g^{-1})_{(1)} \otimes gg' \otimes (hgh'g^{-1})_{(2)} \otimes gg' \\
&= \sum_{(h),(h')} h_{(1)} g h'_{(1)} g^{-1} \otimes gg' \otimes h_{(2)} g h'_{(2)} g^{-1} \otimes gg' \\
&= \Big(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes g \otimes h_{(2)} \otimes g\Big) \cdot \Big(\sum_{(h')} h'_{(1)} \otimes g' \otimes h'_{(2)} \otimes g'\Big) \\
&= \Delta(h \otimes g) \cdot \Delta(h' \otimes g').
\end{aligned}$$

Weiter gilt $\varepsilon((h \otimes g) \cdot (h' \otimes g')) = \varepsilon(hgh'g^{-1} \otimes gg') = \varepsilon(h \otimes g)\varepsilon(h' \otimes g')$.
Zeige, dass S die Antipode der Bialgebra ist:
Sei $g \in G$ und $h \in H^1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h \otimes g) &= m \circ (S \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes g \otimes h_{(2)} \otimes g\Big) \\
&= m\Big(\sum_{(h)} g^{-1} S'(h_{(1)}) g \otimes S'(g) \otimes h_{(2)} \otimes g\Big) \\
&= \sum_{(h)} g^{-1} S'(h_{(1)}) g S'(g) h_{(2)} S'(g)^{-1} \otimes S'(g) g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(h)} g^{-1}S'(h_{(1)})h_{(2)}g \otimes 1 \\ &= g^{-1}\varepsilon'(h)g \otimes 1 = \varepsilon(h \otimes g), \end{aligned}$$

wenn man benutzt, dass $S'(g) = g^{-1}$ und $\varepsilon'(g) = 1$ für alle gruppen-ähnlichen Elemente g ist (Satz 1.2.14). Analog zeigt man, dass

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(h \otimes g) = \varepsilon(h \otimes g)$$

gilt. □

3.1.9 Satz (siehe [Swe69, 8.1.5])
Es sei $(H, \Delta', \varepsilon', S')$ eine punktierte, kokommutative Hopfalgebra und $H^1 \rtimes kG$ die Hopfalgebra wie in Lemma 3.1.8. Dann ist $L : H^1 \rtimes kG \to H,\ h \otimes g \mapsto hg$ ein Hopfalgebrenisomorphismus.

Beweis: Nach Bemerkung 3.1.7 ist L bijektiv und offenbar ein Algebrenhomomorphismus. Sei $h \in H^1$ und $g \in G$. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} \Delta' \circ L(h \otimes g) &= \Delta'(hg) = \sum_{(h)} h_{(1)}g \otimes h_{(2)}g \\ &= (L \otimes L)(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes g \otimes h_{(2)} \otimes g) \\ &= (L \otimes L) \circ \Delta(h \otimes g) \text{ für alle } h \otimes g \in H^1 \rtimes kG. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} (L \circ S)(h \otimes g) &= L(g^{-1}S'(h)g \otimes S'(g)) \\ &= g^{-1}S'(h) \\ &= S'(g)S'(h) \\ &= S'(hg) \\ &= (S' \circ L)(h \otimes g) \end{aligned}$$

da S ein Antialgebrenhomomorphismus ist. Es gilt weiter:

$$\varepsilon(L(h \otimes g)) = \varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) = \varepsilon'(h \otimes g).$$

Damit ist gezeigt, dass L ein Hopfalgebrenisomorphismus ist. □

Jede punktierte, kokommutative Hopfalgebra ist also das semi-direkte Produkt einer Gruppenalgebra und einer punktierten, irreduziblen Unterkoalgebra.
Ziel des folgenden Abschnittes ist es nachzuweisen, dass jede endlich-dimensionale, kokommutative, irreduzible, punktierte Hopfalgebra Dimension 1 hat.

3.1.10 Definition

- Es seien C eine Koalgebra und X, Y zwei Untervektorräume von C. Sei $X \wedge Y$ der Kern der linearen Abbildung $r : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\pi} C/X \otimes C/Y$, wobei π die kanonische Surjektion von $C \otimes C$ nach $C/X \otimes C/Y$ ist. Weiter sei $\wedge^0 X := 0, \wedge^1 X := X$ und $\wedge^n X := (\wedge^{n-1} X) \wedge X$.

- Die Summe aller einfachen Unterkoalgebren nennt man **Koradikal**.

3.1.11 Lemma
Es sei C ein Vektorraum und X und Y zwei Untervektorräume von C.
Dann ist $C/X \otimes C/Y \cong (C \otimes C)/(X \otimes C + C \otimes Y)$.

Beweis: Es sei $\pi : C \otimes C \to C/X \otimes C/Y$ mit $\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \mapsto \sum_{(c)}(c_{(1)} + X) \otimes (c_{(2)} + Y)$ die kanonische lineare Abbildung. Jedes Element $c \in X \otimes C$ hat eine Darstellung der Form $c = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, wobei die $c_{(1)}$ in X liegen. Also liegt $X \otimes C$ im Kern von π. Genauso folgt, dass $C \otimes Y \subset \mathrm{Kern}(\pi)$ ist, und damit liegt auch $X \otimes C + C \otimes Y$ im Kern von π. Somit ist $\varphi : (C \otimes C)/(X \otimes C + C \otimes Y) \to C/X \otimes C/Y$ mit $\varphi(c + (X \otimes C + C \otimes Y)) = \pi(c)$ eine wohldefinierte lineare Abbildung. Es sei $\psi : C/X \otimes C/Y \to (C \otimes C)/(X \otimes C + C \otimes Y)$ mit $\sum_{(c)}(c_{(1)} + X) \otimes (c_{(2)} + Y) \mapsto \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} + (X \otimes C + C \otimes Y)$ gegeben. Dann ist ψ eine wohldefinierte lineare Abbildung mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Somit ist φ ein Isomorphismus. □

3.1.12 Lemma (vgl. [Swe69, 9.0.0, 10.0.1])

1. Es seien C eine Koalgebra und X, Y zwei Untervektorräume.

   Dann gilt: $X \wedge Y = \Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C)$ und $X \wedge Y = (X^\perp Y^\perp)^\perp$.

2. Es sei C eine endlich-dimensionale, kokommutative Koalgebra und R das Koradikal von C. Dann ist $R^\perp$ das Jacobson-Radikal von C^*.

3. Es sei R das Koradikal einer endlich-dimensionalen, kokommutativen Koalgebra C. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $C = \wedge^n R$ ist.

4. Es sei C eine irreduzible, punktierte Koalgebra mit gruppen-ähnlichem Element g. Dann ist das Koradikal $R = kg$ und $\wedge^2 R = kg \oplus P(C)_{g,g}$.

Beweis:

1. Es sei ψ wie in Lemma 3.1.11, $\bar{\pi} : C \otimes C \to (C \otimes C)/(X \otimes C + C \otimes Y)$ die kanonische Abbildung und r die Abbildung aus 3.1.10. Dann ist $\psi \circ r = \bar{\pi} \circ \Delta$. Da ψ ein Isomorphismus ist, gilt $\mathrm{Kern}\, r = \mathrm{Kern}\, \psi \circ r = \mathrm{Kern}\, \bar{\pi} \circ \Delta$. Der Kern von $\bar{\pi} \circ \Delta$ ist $\Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C)$. Damit ist $\Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C) = X \wedge Y$.

   Es sei $c \in X \wedge Y$ und $g = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i^* \in X^\perp Y^\perp$ mit $x_i^* \in X^\perp, y_i^* \in Y^\perp$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist nach der Definition der Multiplikation von C^* in 2.1.4 $g(c) = (\sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i^*)(\Delta(c)) = 0$. Also ist $X \wedge Y \subset (X^\perp Y^\perp)^\perp$.

   Es sei $d \in C$ ein Element, das nicht in $X \wedge Y$ liegt. Dann ist $\Delta(d) \notin C \otimes Y + X \otimes C$. Es seien $x_i \in C \setminus X$ und $y_i \in C \setminus Y$ für $1 \leq i \leq l$ und $e \in C \otimes Y + X \otimes C$ mit $\Delta(d) = \sum_{i=1}^l x_i \otimes y_i + e$. Wir können o.B.d.A annehmen, dass die $y_1 + Y, \ldots, y_l + Y$ linear unabhängig in C/Y sind. Es existiert also ein $x^* \in X^\perp$ und ein $y^* \in Y^\perp$, so dass $x^*(x_1) = 1$ und $y^*(y_i) = \delta_{1,i}$ für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Damit ist aber $(x^* y^*)(d) = (x^* \otimes y^*)(\Delta(d)) = (x^* \otimes y^*)(\sum_{i=1}^l x_i \otimes y_i) = x^*(x_1) \otimes y^*(y_1) = 1$ und $d \notin (X^\perp Y^\perp)^\perp$. Also ist $X \wedge Y = (X^\perp Y^\perp)^\perp$.

2. Folgt unmittelbar aus der Definition und Bemerkung 2.1.9.

3. Da $R^\perp$ das Jacobson-Radikal von C^* ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(R^\perp)^n = \{0\}$.

   Wegen 1. ist $\wedge^n R = ((R^\perp)^n)^\perp = 0^\perp = C$.

4. Da C punktiert und irreduzibel ist, besitzt C genau eine einfache Unterkoalgebra kg mit gruppen-ähnlichem Element g. Damit ist $R = kg$. Es sei $C_1 := R \wedge R$. Ein Element $c \in C$ liegt genau dann in C_1, wenn $\Delta(c) \subset R \otimes C + C \otimes R$ gilt. Damit ist $kg \oplus P(C)_{g,g} \subset C_1$.

   Es sei $d \in C_1$. Dann ist $c := d - \varepsilon(d)g \in C_1$. Sei $\Delta(c) = \sum_{1 \leq i \leq n} g \otimes b_i + a_i \otimes g$. Aus der Koeins-Eigenschaft folgt damit $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i + \varepsilon(a_i)g = c = \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon(b_i)g + a_i$. Es gilt weiter $0 = \varepsilon(c) = \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon(b_i) + \varepsilon(a_i)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(c) &= \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i \otimes g + g \otimes b_i) \\
&= g \otimes c + \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i \otimes g - \varepsilon(a_i) g \otimes g) \\
&= g \otimes c + c \otimes g + \sum_{1 \leq i \leq n} (-\varepsilon(b_i) g \otimes g - \varepsilon(a_i) g \otimes g) \\
&= c \otimes g + g \otimes c.
\end{aligned}$$

   Also ist $c \in P(C)_{g,g}$ und $d \in kg \oplus P(C)_{g,g}$.

□

3.1.13 Lemma
Es sei C eine punktierte, irreduzible, endlich-dimensionale und kokommutative Bialgebra. Hat k Charakteristik 0, dann ist C isomorph zu k.

Beweis: Sei R das Koradikal von C. Nach Lemma 3.1.12, Teil 3 existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $C = \wedge^n R$ gilt. Da C endlich-dimensional ist, gilt $P(C) = \emptyset$ nach Satz 1.2.15. Da C irreduzibel und punktiert ist, ist 1 das einzige gruppen-ähnliche Element und $k1$ die einfache Unterkoalgebra. Nach Lemma 3.1.12, Teil 4 ist $R = \wedge^2 R$, also induktiv $C = \wedge^n R = R$. Also ist $C \cong k$. □

3.1.14 Satz
Es sei H eine kokommutative, endlich-dimensionale, punktierte Hopfalgebra. Hat k Charakteristik 0, dann ist $H = kG(H)$.

Beweis: Nach Satz 3.1.9 ist $H \cong H^1 \rtimes kG(H)$ als Hopfalgebra, wobei H^1 eine punktierte, irreduzible Unterhopfalgebra ist. Nach Lemma 3.1.13 ist jede irreduzible, punktierte und kokommutative Hopfalgebra entweder trivial oder unendlich-dimensional. Da H endlich-dimensional ist, muss $H^1 \cong k$ sein. Damit ist $H = kG(H)$ als Hopfalgebra. □

Da jede kokommutative Hopfalgebra über einem Körper, der ein Zerfällungskörper für alle Algebren, die durch Dualisieren aus einfachen Unterkoalgebren von H entstehen, ist, nach Lemma 3.1.3, Teil 4 punktiert ist, folgt unmittelbar:

3.1.15 Satz
Es sei H eine kokommutative, endlich-dimensionale Hopfalgebra. Sei k von Charakteristik 0 ein Zerfällungskörper für alle Algebren, die durch Dualisieren aus einfachen Unterkoalgebren von H entstehen. Dann ist $H = kG(H)$. □

Ist k algebraisch abgeschlossenen von Charakteristik 0, so ist die Bedingung an k aus Satz 3.1.15 erfüllt.

3.1.16 Bemerkung
Benutzt man ein Ergebnis von Larson und Radford, so folgt dieses Ergebnis aus Satz 3.1.2. Diese haben in [LR88] gezeigt, dass eine endlich-dimensionale Hopfalgebra über einem Körper der Charakteristik 0 genau dann kohalbeinfach ist, wenn $S^2 = \mathrm{id}$ gilt. Nach Satz 1.2.12 ist die Antipode einer kokommutativen Hopfalgebra eine Involution. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.1.2 erfüllt.

3.2 Hopfalgebren kommutativer, halbeinfacher Algebren

In diesem Kapitel werden die Hopfalgebrenstrukturen kommutativer, halbeinfacher Hopfalgebren über bestimmten Körpern mit Hilfe von dualen Gruppenalgebren klassifiziert. Die zentrale Idee dabei ist, die duale Hopfalgebra einer kommutativen, halbeinfachen Algebra zu betrachten. Diese ist kokommutativ und kohalbeinfach. Dann können Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts über die Struktur kokommutativer Hopfalgebren benutzt werden.

3.2.1 Lemma
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra und $\hat{H} := \mathrm{Hom}(H, k)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von H nach k. Dann ist $(\hat{H}, *)$ mit der Konvolution $*$ eine Gruppe mit neutralem Element ε und Inversen Elementen $f^{-1} := f \circ S$ für alle $f \in \hat{H}$.

Beweis: Es seien $f, \pi \in \hat{H}$ und $g, h \in H$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f * \pi)(gh) &= (f \otimes \pi)(\Delta(gh)) \\ &= (f \otimes \pi)(\Delta(g)\Delta(h)) \\ &= (f \otimes \pi)(\Delta(g)) \cdot (f \otimes \pi)(\Delta(h)) \\ &= (f * \pi)(g)(f * \pi)(h) \text{ für alle } g, h \in H. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $f * \pi \in \hat{H}$ gilt.
Nach Satz 1.2.2 ist $\varepsilon \in \hat{H}$ das neutrale Element. Es gilt auch

$$\begin{aligned} (f * (f \circ S))(g) &= \sum_{(g)} f(g_{(1)}) f(S(g_{(2)})) \\ &= f(\sum_{(g)} g_{(1)} S(g_{(2)})) \\ &= f(\varepsilon(g)1) = \varepsilon(g) f(1) = \varepsilon(g) \end{aligned}$$

und analog $((f \circ S) * f)(g) = \varepsilon(g)$. Hiermit ist gezeigt, dass $f^{-1} = f \circ S$ ist. Somit ist $(\hat{H}, *)$ eine Gruppe. □

3.2.2 Satz
Es sei G eine endliche Gruppe von Primzahlordnung p, k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebrenstruktur auf kG. Dann ist Δ kokommutativ und somit gilt $|G(kG)| = |G|$ nach Satz 3.1.15.

Beweis: Es sei $\hat{G} = \mathrm{Hom}(kG, k)$ die Menge der irreduziblen Charaktere von kG. Dann ist $(\hat{G}, *)$ nach Satz 3.2.1 eine Gruppe. Da $|\hat{G}| = |G| = p$ für eine Primzahl p ist, gilt $\hat{G} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\hat{G}$ ist somit abelsch. Da die irreduziblen Charaktere eine Basis des Dualraum kG^* bilden, ist kG^* kommutativ. Dann ist die Komultiplikation auf kG aber kokommutativ. Hieraus folgt $|G(kG)| = |G|$ aus Satz 3.1.15. □

3.2.3 Satz (Konstruktion nicht kokommutativer, kommutativer Hopfalgebren)
Es sei G eine endliche, nicht-abelsche Gruppe, H eine kommutative, halbeinfache Algebra mit $\dim H = |G|$ über dem Körper k. Es sei $(\Delta, m, n, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra auf kG und $(kG^*, m', n', \Delta', \varepsilon', S')$ die dazu duale Hopfalgebra. Weiter sei k ein Zerfällungskörper von kG^* und H. Dann ist kG^* als Algebra isomorph zu H. Die Hopfalgebrenstruktur auf kG^* liefert dann nach Satz 1.2.17 eine nicht kokommutative Hopfalgebrenstruktur auf H.

Beweis: Da die triviale Hopfalgebra von kG als Algebra nicht kommutativ und als Koalgebra kokommutativ ist, ist die dazu duale Hopfalgebra auf kG^* nach Teil 1 von Satz 2.1.8 kommutativ als Algebra und nicht kokommutativ als Koalgebra. Die Untervektorräume kg für $g \in G$ sind eindimensionale, also einfache Unterkoalgebren. Da $kG = \bigoplus_{g \in G} kg$ ist, ist kG kohalbeinfach nach Definition 3.1.1. Damit ist kG^* halbeinfach. Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist $kG^* \cong k \oplus \cdots \oplus k$. Es gilt aber auch $H \cong k \oplus \cdots \oplus k$. Also sind kG^* und H isomorph als Algebren. Dann liefert Satz 1.2.17 die Konstruktion einer nicht kokommutativen Hopfalgebra auf H. □

3.2.4 Bemerkung
Ist B eine endliche, abelsche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt, d.h. kB ist halbeinfach. Dann liefert Satz 3.2.3 eine nicht kokommutative Hopfalgebrenstruktur auf kB, falls es eine nicht-abelsche Gruppe G gibt mit $|G| = |B|$.

3.2.5 Satz
Es sei H eine endlich-dimensionale, kommutative, halbeinfache Algebra über einem Zerfällungskörper k von H und $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine nicht kokommutative Hopfalgebra. Dann existiert eine nicht-abelsche Gruppe G mit trivialer Hopfalgebrenstruktur auf kG, so dass H als Hopfalgebra isomorph zur dualen Hopfalgebra kG^* ist.

Beweis: Die duale Hopfalgebra auf H^* ist kokommutativ, kohalbeinfach und nicht kommutativ nach Teil 1 und 2 von 2.1.8. Da H^{**} als Algebra isomorph zu H ist, ist k auch ein Zerfällungskörper von H^{**}. Es sind also alle Voraussetzungen aus Satz 3.1.2 für H^* erfüllt. Also ist $H^* = kG$ eine Gruppenalgebra, wobei $G = G(H^*)$ die Gruppe der gruppenähnlichen Elemente ist. Da H^* nicht kommutativ ist, ist G eine nicht-abelsche Gruppe. Weiter gilt aus Dimensionsgründen $|G| = \dim H$. Da H^{**} nach Satz 2.1.7 isomorph zu H als Hopfalgebra ist, ist kG^* als Hopfalgebra isomorph zu H. □

3.2.6 Bemerkung
Es sei B eine abelsche Gruppe endlicher Ordnung, k ein Zerfällungskörper von kB, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. Da kB als Hopfalgebra nach Satz 3.2.5 isomorph zu einer dualen Gruppenalgebra ist, wird jede nicht kokommutative Hopfalgebra auf kB wird durch eine Konstruktion wie in Satz 3.2.3 erzeugt. Hieraus folgt auch, dass halbeinfache Gruppenalgebren von Primzahl oder Primzahlquadratordnung nur kokommutative Hopfalgebrenstrukturen besitzen, da jede Gruppe einer solchen Ordnung notwendigerweise abelsch ist. Das Ergebnis aus Satz 3.2.2 folgt also in allgemeinerer Form aus Satz 3.2.5.

Im Folgenden wird die duale Hopfalgebra einer Gruppenalgebra konkret angegeben.

3.2.7 Lemma
Es sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = n$. Seien $s_1, \ldots, s_n$ die Elemente von G mit $s_1 = 1$. Weiter sei $s_1^*, \ldots, s_n^*$ die duale Basis in kG^* und $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra. Dann gilt für die duale Hopfalgebra kG^*:

1. $\Delta'(s_i^*) = \sum_{\{(j,u)|s_j \cdot s_u = s_i\}} s_j^* \otimes s_u^*$,
2. $\varepsilon'(s_i^*) = \delta_{i,1}$
3. $S'(s_i^*) = (s_i^{-1})^*$
4. $\sum_{1 \leq i \leq n} s_i^* = \varepsilon$

für alle $i = 1, \ldots, n$.
Weiter sind die s_i^* die primitiven Idempotente der kommutativen Algebra kG^*.

Beweis:

1. Es sei $\Delta'(s_i^*) = \sum_{u,j=1}^{n} a_{u,j} s_u^* \otimes s_j^*$ mit Koeffizienten $a_{u,j} \in k$.
Es gilt nach Satz 2.1.4 $s_i^*(s_l s_t) = \Delta'(s_i^*)(s_l \otimes s_t) = \sum_{u,j=1}^{n} a_{u,j} s_u^*(s_l) \otimes s_j^*(s_t) = a_{l,t}$.
Damit ist $a_{l,t} = 1$ genau dann wenn $s_l s_t = s_i$ ist und ansonsten gleich 0. Also ist
$$\Delta'(s_i^*) = \sum_{\{1 \leq u,j \leq n | s_u s_j = s_i\}} s_u^* \otimes s_j^* \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$
2. Aus der Koeins-Eigenschaft folgt $\sum_{\{(u,j)|s_u \cdot s_j = s_i\}} \varepsilon'(s_u^*) s_j^* = (\varepsilon' \otimes \mathrm{id})(\Delta'(s_i^*)) = s_i^*$.
Durch Koeffizientenvergleich der rechten und linken Seite erhält man $\varepsilon'(s_u^*) = \delta_{u,1}$ für alle $1 \leq u \leq n$.
3. Da $S'(s_i^*)(s_j) = s_i^*(S(s_j)) = s_i^*(s_j^{-1})$ gilt, ist $S'(s_i^*) = (s_i^{-1})^*$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
4. Es gilt $\sum_{1 \leq i \leq n} s_i^*(s_j) = 1$ für alle $s_j \in G$. Also ist $\sum_{1 \leq i \leq n} s_i^* = \varepsilon$ und somit gleich dem Einselement der Algebra kG^*.

Weiter gilt $(s_i^* \cdot s_u^*)(s_j) = (s_i^* \otimes s_u^*)(\Delta(s_j)) = s_i^*(s_j) \cdot s_u^*(s_j) = \delta_{i,j}\delta_{j,u}$ für alle $1 \leq i, j, u \leq n$. Damit ist $s_i^* \cdot s_j^* = \delta_{i,j} s_i^*$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Die s_i^* sind also primitive, paarweise orthogonale Idempotente von kG^*. □

3.2.8 Beispiel
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, G eine endliche Gruppe und H eine abelsche Gruppe mit $|G| = |H| = n$. Seien $s_1, \ldots, s_n$ die Elemente von G mit $s_1 = 1$. Es sei $s_1^*, \ldots, s_n^*$ die duale Basis in kG^*. Dann gilt nach Lemma 3.2.7 $\Delta'(s_i^*) = \sum_{\{(j,u)|s_j \cdot s_u = s_i\}} s_j^* \otimes s_u^*$, $\varepsilon'(s_i^*) = \delta_{i,1}$ und $S'(s_i^*) = ({s_i}^{-1})^*$ für alle $1 \leq i \leq n$. Seien $\delta_1, \ldots, \delta_n$ die primitiven, paarweise orthogonalen Idempotente von kH. Dann ist die Abbildung $\pi : kG^* \to kH$ mit $s_i^* \to \delta_i$ ein Algebrenisomorphismus, der mit Satz 1.2.17 eine nicht kokommutative Hopfalgebra erzeugt mit:

- $\Delta(\delta_i) = \sum_{\{(j,u)|s_j \cdot s_u = s_i\}} \delta_j \otimes \delta_u$
- $\varepsilon(\delta_i) = \delta_{i,1}$
- $S(\delta_i) = \delta_j$ mit $s_i^{-1} = s_j$ □

Kapitel 4

Twisten

Ziel dieses Kapitels ist es, Hopfalgebren auf halbeinfachen Gruppenringen zu konstruieren, deren gruppen-ähnliche Elemente keine Gruppenbasis bildet. Da die gruppen-ähnlichen Elemente einer endlich-dimensionalen Hopfalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 genau dann eine Basis bilden, wenn die Hopfalgebra kokommutativ ist, ist diese Aufgabe gleichbedeutend mit der Konstruktion nicht kokommutativer Hopfalgebrenstrukturen auf Gruppenalgebren. Dies gelingt beispielsweise durch Twisten der trivialen Hopfalgebrenstruktur auf Gruppenalgebren. Twisten bezeichnet ein Verfahren, mit dem man aus einer Hopfalgebra durch Konjugation des Bildes der Komultiplikation mit einer Einheit des Tensor-Produkts eine andere Hopfalgebrenstruktur mit gleicher Algebren- und einer anderen Koalgebrenstruktur erhält.

4.1 Twisten in Hopfalgebren

4.1.1 Definition
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra, $\Omega \in H \otimes H$ eine Einheit und

$$\partial\Omega := [(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega^{-1})](1 \otimes \Omega^{-1})(\Omega \otimes 1)[(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega)] \in H \otimes H \otimes H.$$

- Ist $\partial\Omega \in Z((\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(H))$, so nennt man Ω einen **Pseudo-Kozykel**. Gilt $\partial\Omega = 1 \otimes 1 \otimes 1$, so nennt man Ω einen **Kozykel**.
- Man nennt Ω **kounitel**, wenn $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Omega) = 1$ gilt.
- Ein Element $\Omega \in H \otimes H$ heißt **symmetrisch**, falls $\Omega = \tau(\Omega)$ ist.

Das folgende Lemma liefert die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an ein Twistelement, so dass die getwistete Komultiplikation einer Bialgebra mit gleicher Koeins wieder eine Koalgebra ist. Die neue Komultiplikation ist ein Algebrenhomomorphismus, liefert also zusammen mit der alten Algebrenstruktur und Koeins eine neue Bialgebrenstruktur.

4.1.2 Lemma
Es sei $(B, m, n, \Delta, \varepsilon)$ eine Bialgebra, $\Omega \in B \otimes B$ eine Einheit und $\Delta_\Omega(b) := \Omega \cdot \Delta(b) \cdot \Omega^{-1}$ für alle $b \in B$. Dann ist Δ_Ω ein Algebrenhomomorphismus von B nach $B \otimes B$. Die Abbildung Δ_Ω ist koassoziativ genau dann, wenn Ω ein Pseudo-Kozykel ist. Die Abbildung Δ_Ω ist genau dann eine Komultiplikation mit Koeins ε, wenn Ω ein Pseudo-Kozykel ist und $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega)$ und $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Omega)$ in $Z(B)$ liegen.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Delta_\Omega(b)) &= (\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Omega\Delta(b)\Omega^{-1}) \\
&= (\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Omega) \cdot (\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Delta(b)) \cdot (\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Omega^{-1}) \\
&= (\Omega \otimes 1) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(b)) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega^{-1}) \cdot (\Omega^{-1} \otimes 1) \\
&= (\Omega \otimes 1) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(b)) \cdot ((\Omega \otimes 1) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega))^{-1},
\end{aligned}$$

analog folgt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \Delta_\Omega)(\Delta_\Omega(b)) &= (1 \otimes \Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(b)) \cdot ((1 \otimes \Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega))^{-1} \\
&= (1 \otimes \Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(b)) \cdot ((1 \otimes \Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega))^{-1}
\end{aligned}$$

da Δ koassoziativ ist.
Die Abbildung Δ_Ω ist genau dann koassoziativ, wenn für alle $b \in B$

$$(\Delta_\Omega \otimes \mathrm{id})(\Delta_\Omega(b)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta_\Omega)(\Delta_\Omega(b))$$

ist, also genau dann, wenn

$$\partial\Omega \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(b)) \cdot (\partial\Omega)^{-1} = (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(b))$$

für alle $b \in B$ erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn Ω ein Pseudo-Kozykel ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta_\Omega(b)) &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega) \cdot (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(b)) \cdot (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega)^{-1} \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega) \cdot (b \otimes 1) \cdot (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega)^{-1}.
\end{aligned}$$

da ε eine Koeins ist. Analog ist $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta_\Omega(b)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Omega) \cdot (1 \otimes b) \cdot (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Omega)^{-1}$.
Die Abbildung ε ist genau dann eine Koeins von Δ_Ω wenn $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta_\Omega(b)) = b \otimes 1$ und $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta_\Omega(b)) = 1 \otimes b$ für alle $b \in B$ ist.
Dies ist genau dann der Fall wenn $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Omega)$ und $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Omega)$ in $Z(B)$ liegen. □

4.1.3 Lemma
Sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra, $g_1 : H \otimes H \otimes H \to H, g_1 = m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S \otimes \mathrm{id})$ und $g_2 : H \otimes H \otimes H \to H,\ g_2 = m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (S \otimes \mathrm{id} \otimes S)$ lineare Abbildungen, dann gilt

$$g_1 \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id},$$

$$g_2 \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = S.$$

Für $a \in H \otimes H \otimes H$ und $h \in H$ gilt

$$g_1((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) \cdot g_1(a) = g_1(((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) \cdot a),$$

$$g_1(a) \cdot g_1((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) = g_1(a \cdot ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)))$$

und

$$g_2((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) \cdot g_2(a) = g_2(a \cdot ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h))),$$

$$g_2(a) \cdot g_2((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) = g_2(((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h)) \cdot a).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
m\circ(m\otimes \mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes S\otimes \mathrm{id})\circ(\Delta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta &= m\circ((m\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta)\otimes \mathrm{id})\circ\Delta\\
&= m\circ((n\circ\varepsilon)\otimes \mathrm{id})\circ\Delta\\
&\quad \text{mit der Antipoden-Eigenschaft}\\
&= \mathrm{id} \text{ nach der Koeins-Eigenschaft.}
\end{aligned}$$

Sei $(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta=\sum_{(h)} h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}$, $a=\sum_{(a)} a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}$, dann ist

$$\begin{aligned}
g_1((\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta(h))\cdot g_1(a) &= h\cdot\sum_{(a)} a_{(1)}S(a_{(2)})a_{(3)}\\
&= \sum_{(h)} h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})\sum_{(a)} a_{(1)}S(a_{(2)})a_{(3)}\\
&= \sum_{(h)(a)} h_{(1)}a_{(1)}S(a_{(2)})\varepsilon(h_{(2)})a_{(3)}\\
&= \sum_{(h)(a)} h_{(1)}a_{(1)}S(a_{(2)})S(h_{(2)})h_{(3)}a_{(3)}\\
&= \sum_{(h)(a)} h_{(1)}a_{(1)}S(h_{(2)}a_{(2)})h_{(3)}a_{(3)}\\
&= g_1((\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(h))\cdot a).
\end{aligned}$$

Die zweite Identität und den Fall $i=2$ zeigt man analog. □

Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Antipode einer getwisteten Hopfalgebra.
Zugunsten einer übersichtlicheren Schreibweise wird im Folgenden das Summenzeichen in der Darstellung von Elementen aus Tensor-Produkten unterdrückt, d.h statt $h=\sum_{i=1}^n h_{1,i}\otimes h_{2,i}\otimes h_{3,i}\in H\otimes H\otimes H$ mit $h_{1,i},h_{2,i},h_{3,i}\in H$ heißt es $h=h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}$.

4.1.4 Satz (siehe [Nik98, 2.5])
Es seien $(H,m,n,\Delta,\varepsilon,S)$ eine halbeinfache Hopfalgebra über einem Zerfällungskörper k der Charakteristik 0 oder $H=kG$ eine halbeinfache Gruppenalgebra über einem Zerfällungskörper k. Weiter seien B eine kommutative Unteralgebra von H mit $S(B)=B$ und $\Omega=\Omega^{(1)}\otimes\Omega^{(2)}$ ein kounitel Pseudo-Kozykel mit der Eigenschaft $\partial\Omega\in B\otimes B\otimes B$. Dann ist $u:=m((\mathrm{id}\otimes S)(\Omega))=\Omega^{(1)}S(\Omega^{(2)})$ invertierbar und S_Ω mit $S_\Omega(h):=uS(h)u^{-1}$ für alle $h\in H$ ist die Antipode zu $(H,m,n,\Delta_\Omega,\varepsilon)$.

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned}
\partial\Omega &=: D^{(1)}\otimes D^{(2)}\otimes D^{(3)}\\
(\partial\Omega)^{-1} &=: D^{-(1)}\otimes D^{-(2)}\otimes D^{-(3)}\\
\Delta(h) &=: h_{(1)}\otimes h_{(2)}\\
\text{und } (\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(h)) &=: h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}
\end{aligned}$$

1. Schritt
Wir zeigen

$$g_1((\partial\Omega)^{-1}),\ g_1(\partial\Omega),\ g_2((\partial\Omega)^{-1})\in Z(H).$$

Da $\partial\Omega, (\partial\Omega)^{-1} \in Z((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(H)))$ sind, gilt mit Lemma 4.1.3 für alle $h \in H$.

$$\begin{aligned} hD^{(1)}S(D^{(2)})D^{(3)} &= g_1((\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h)) \cdot g_1(\partial\Omega) \\ &= g_1\left((\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h) \cdot \partial\Omega\right) \\ &= g_1\left(\partial\Omega \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h)\right) \\ &= g_1(\partial\Omega) \cdot g_1((\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h)) \\ &= D^{(1)}S(D^{(2)})D^{(3)}h \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$g_1((\partial\Omega)^{-1}) = D^{-(1)}S(D^{-(2)})D^{-(3)},\ g_2((\partial\Omega)^{-1}) = S(D^{-(1)})D^{-(2)}S(D^{-(3)}) \in Z(H) \text{ ist.}$$

2. Schritt
Es seien $\Omega^{-1} := \Omega^{-(1)} \otimes \Omega^{-(2)}$ und $v := (m \circ (S \otimes \mathrm{id}))(\Omega^{-1}) = S(\Omega^{-(1)})\Omega^{-(2)}$. Zu zeigen ist, dass $uv, vu \in Z(H)$ sind. Wir führen $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^{(1)} \otimes \bar{\Omega}^{(2)}$ und $\bar{\Omega}^{-1} = \bar{\Omega}^{-(1)} \otimes \bar{\Omega}^{-(2)}$ ein, wobei $\bar{\Omega}$ eine Kopie von Ω und $\bar{\Omega}^{-1}$ eine Kopie von Ω^{-1} ist, um Summenzeichen zu sparen. Da Ω kounitel ist, gilt

$$\varepsilon(\bar{\Omega}^{(1)})\bar{\Omega}^{(2)} = \bar{\Omega}^{-(1)}\varepsilon(\bar{\Omega}^{-(2)}) = 1.$$

Weiter sei $\Delta(\bar{\Omega}^{-(2)}) = \bar{\Omega}^{-(2)}_{(1)} \otimes \bar{\Omega}^{-(2)}_{(2)}$ und $\Delta(\bar{\Omega}^{(1)}) = \bar{\Omega}^{(1)}_{(1)} \otimes \bar{\Omega}^{(1)}_{(2)}$.
Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} uv &= \Omega^{(1)}S(\Omega^{(2)})S(\Omega^{-(1)})\Omega^{-(2)} \\ &= \bar{\Omega}^{-(1)}\varepsilon(\bar{\Omega}^{-(2)})\Omega^{(1)}S(\Omega^{(2)})S(\Omega^{-(1)})\Omega^{-(2)}\varepsilon(\bar{\Omega}^{(1)})\bar{\Omega}^{(2)} \\ &= \bar{\Omega}^{-(1)}\Omega^{(1)}\varepsilon(\bar{\Omega}^{(1)})S(\Omega^{(2)})S(\Omega^{-(1)})\varepsilon(\bar{\Omega}^{-(2)})\Omega^{-(2)}\bar{\Omega}^{(2)} \\ &= \bar{\Omega}^{-(1)}\Omega^{(1)}\bar{\Omega}^{(1)}_{(1)}S(\bar{\Omega}^{(1)}_{(2)})S(\Omega^{(2)})S(\Omega^{-(1)})S(\bar{\Omega}^{-(2)}_{(1)})\bar{\Omega}^{-(2)}_{(2)}\Omega^{-(2)}\bar{\Omega}^{(2)} \\ &= \bar{\Omega}^{-(1)}\Omega^{(1)}\bar{\Omega}^{(1)}_{(1)}S(\bar{\Omega}^{-(2)}_{(1)}\Omega^{-(1)}\Omega^{(2)}\bar{\Omega}^{(1)}_{(2)})\bar{\Omega}^{-(2)}_{(2)}\Omega^{-(2)}\bar{\Omega}^{(2)} \\ &= g_1(\partial\Omega) \\ &= D^{(1)}S(D^{(2)})D^{(3)} \end{aligned}$$

und analog $vu = g_2((\partial\Omega)^{-1}) = S(D^{-(1)})D^{-(2)}S(D^{-(3)})$. Somit ist $uv - vu \in Z(H)$.
3. Schritt
Zeige $uv = vu$.
Es sei W ein beliebiger irreduzibler H-Modul und $\pi : H \to \mathrm{End}_k W$ die dazugehörige irreduzible Darstellung von H. Da $uv - vu \in Z(H)$ ist, gilt $\pi(uv - vu) \in \mathrm{End}_H W$. Der Körper k ist ein Zerfällungskörper von H. Hieraus folgt $\pi(uv - vu) = y \cdot \mathrm{id}$ für ein $y \in k$. Da $y\,\mathrm{Spur}(\pi(1)) = \mathrm{Spur}(\pi(uv - vu)) = 0$ gilt, folgt $y = 0$, im Fall, dass k Charakteristik 0 hat. Ist $H = kG$ eine halbeinfache Gruppenalgebra, dann teilt die Charakteristik p von k nicht die Gruppenordnung von G und die Brauercharaktere sind gleich den gewöhnlichen, irreduziblen Charakteren. Da die Charaktergrade der irreduziblen Charakter die Gruppenordnung teilen, folgt, dass p den Grad der irreduziblen Charaktere nicht teilt. Also ist $\mathrm{Spur}(\pi(1)) \neq 0$. Es gilt: $0 = \mathrm{Spur}(\pi(uv - vu)) = y\,\mathrm{Spur}(\pi(1))$, also auch $y = 0$. Da W ein beliebiger irreduzibler H-Modul und H halbeinfach ist, folgt $uv = vu$.
4. Schritt
Sei $\theta := g_1((\partial\Omega)^{-1})$. Wir zeigen, dass $u^{-1} = v\theta$ ist.
Es gilt

$$\begin{aligned} uv \cdot \theta &= g_1(\partial\Omega) \cdot g_1(\partial\Omega^{-1}) \\ &= D^{(1)}S(D^{(2)})D^{(3)} \cdot D^{-(1)}S(D^{-(2)})D^{-(3)} \\ &= D^{(1)}D^{-(1)}S(D^{(2)}D^{-(2)})D^{(3)}D^{-(3)} \\ &= g_1(\partial\Omega \cdot (\partial\Omega)^{-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

wenn man benutzt, dass $\partial\Omega^{-1}$ und $\partial\Omega$ in $B \otimes B \otimes B$ liegen, B kommutativ ist und $S(B) \subset B$ gilt. Analog folgt $\theta \cdot uv = 1$. Hieraus folgt $\theta = (uv)^{-1}$. Es gilt $u^{-1} = v\theta$, denn $uv\theta = 1$ und $\theta uv = \theta vu = v\theta u = 1$, da $\theta \in Z(H)$ nach Schritt 1 ist.

5.Schritt

Zeige, dass S_Ω eine Antipode zu der Bialgebra $(H, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon)$ ist.

Es gilt

$$1 = m(S \otimes \mathrm{id})(\Omega^{-1}\Omega) = S(\Omega^{(1)})S(\bar{\Omega}^{-(1)})\bar{\Omega}^{-(2)}\Omega^{(2)}$$

und

$$1 = m(\mathrm{id} \otimes S)(\Omega^{-1}\Omega) = \Omega^{-(1)}\bar{\Omega}^{(1)}S(\bar{\Omega}^{(2)})S(\Omega^{-(2)}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} m(S_\Omega \otimes \mathrm{id})\Delta_\Omega(h) &= uS(\Omega^{(1)}h_{(1)}\Omega^{-(1)})u^{-1}\Omega^{(2)}h_{(2)}\Omega^{-(2)} \\ &= uS(\Omega^{(1)}h_{(1)}\Omega^{-(1)})v\Omega^{(2)}h_{(2)}\Omega^{-(2)}\theta \\ &= uS(\Omega^{-(1)})S(h_{(1)})S(\Omega^{(1)})S(\bar{\Omega}^{-(1)})\bar{\Omega}^{-(2)}\Omega^{(2)}h_{(2)}\Omega^{-(2)}\theta \\ &= uS(\Omega^{-(1)})S(h_{(1)})h_{(2)}\Omega^{-(2)}\theta[\text{Wenn man die obige Identität verwendet}] \\ &= (n \circ \varepsilon)(h)uv\theta = (n \circ \varepsilon)(h) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m(\mathrm{id} \otimes S_\Omega)\Delta_\Omega(h) &= \Omega^{(1)}h_{(1)}\Omega^{-(1)}uS(\Omega^{(2)}h_{(2)}\Omega^{-(2)})u^{-1} \\ &= \Omega^{(1)}h_{(1)}\Omega^{-(1)}\bar{\Omega}^{(1)}S(\bar{\Omega}^{(2)})S(\Omega^{-(2)})S(h_{(2)})S(\Omega^{(2)})u^{-1} \\ &= \Omega^{(1)}h_{(1)}S(h_{(2)})S(\Omega^{(2)})u^{-1}[\text{Wenn man die obige Identität verwendet}] \\ &= \varepsilon(h)uu^{-1} = 1\varepsilon(h) \end{aligned}$$

für alle $h \in H$. Also ist S_Ω die Antipode zur Bialgebra $(H, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon)$.

Damit ist $(H, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine Hopfalgebra. □

4.1.5 Satz

Es sei H eine kokommutative Hopfalgebra und Ω ein Pseudo-Kozykel von $H \otimes H$. Dann ist Δ_Ω genau dann kokommutativ, wenn $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \in Z(\Delta(H))$ ist.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \tau(\Delta_\Omega(h)) &= \tau(\Omega \cdot \Delta(h) \cdot \Omega^{-1}) \\ &= \tau(\Omega) \cdot \tau(\Delta(h)) \cdot \tau(\Omega^{-1}) \\ &= \tau(\Omega) \cdot \Delta(h) \cdot \tau(\Omega)^{-1} \end{aligned}$$

da $\tau \circ \Delta = \Delta$ ist. Die Komultiplikation Δ_Ω ist also genau dann kokommutativ, wenn

$$\tau(\Omega) \cdot \Delta(h) \cdot \tau(\Omega)^{-1} = \Omega\Delta(h)\Omega^{-1}$$

für alle $h \in H$ erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \in Z(\Delta(H))$ ist. □

4.1.6 Satz (siehe [Nik98, 4.1])

Sei G eine endliche Gruppe. Weiter sei $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ mit der üblichen Algebrenstruktur eine Hopfalgebra und $ch(kG)$ die freie abelsche Gruppe, die von den irreduziblen Charakteren erzeugt wird.

1. Dann ist $ch(kG)$ bezüglich der Multiplikation $M : ch(kG) \otimes_{\mathbb{Z}} ch(kG) \to ch(kG)$ mit $\alpha \otimes \beta \mapsto (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta$ für alle $\alpha, \beta \in ch(kG)$ ein Ring mit Einselement ε. Man nennt $(ch(kG), M)$ den Charakterring. Die Multiplikation ist die Konvolution aus Bemerkung 1.2.2.

2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und $(kG, m, n, \Delta_1, \varepsilon_1, S_1)$ mit der üblichen Algebrenstruktur eine weitere Hopfalgebra mit Charakterring $ch_1(kG)$. Dann ist Δ_1 genau dann ein Twist von Δ, wenn der Gruppenhomomorphismus $\phi : ch(kG) \to ch_1(kG)$, mit $\phi = \mathrm{id}_{ch(kG)}$ ein Ringhomomorphismus ist.

Beweis:

1. Es bleibt zu zeigen, dass $M(\alpha \otimes \beta) \in ch(kG)$ für alle Charaktere α und β gilt. Seien α und β Charaktere zu den kG-Moduln A und B, dann ist $A \otimes B$ ein $(kG \otimes kG)$-Modul durch diagonale Operation $a : kG \otimes kG \to \mathrm{End}_k(A \otimes B)$ und damit ein kG-Modul durch $kG \xrightarrow{\Delta} kG \otimes kG \xrightarrow{a} \mathrm{End}_k(A \otimes B)$. Der Charakter zu $A \otimes B$ ist genau $(\alpha \otimes \beta) \circ \Delta$. Die Abbildung M ist die Einschränkung der Konvolution aus 1.2.2 auf Charaktere, also ist insbesondere ε das Einselement und M ist assoziativ.

2. Sei $(\Delta_1, \varepsilon_1)$ ein Twist von (Δ, ε) durch das Element $\Omega \in kG \otimes kG$ und α, β zwei irreduzible Charaktere. Dann ist $\alpha \otimes \beta$ eine Spurfunktion von $kG \otimes kG \cong k(G \times G)$ nach k. Damit ist

$$(\alpha \otimes \beta)(\Delta_1(h)) = (\alpha \otimes \beta)\left(\Omega\Delta(h)\Omega^{-1}\right) = (\alpha \otimes \beta)(\Delta(h))$$

für alle $h \in H$. Also ist $(\alpha \otimes \beta) \circ \Delta = (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta_1$. Da $\varepsilon_1 = \varepsilon$ gilt, ist $\phi(\varepsilon) = \varepsilon_1$. Nach der Definition der Multiplikation in $ch(kG)$ und $ch_1(kG)$ ist ϕ ein Ringisomorphismus.

Sei umgekehrt ϕ ein Ringisomorphismus. Seien $\chi_1, \dots, \chi_n$ die irreduziblen Charaktere von kG und $\delta_1, \dots, \delta_n$ die entsprechenden zentral-primitiven Idempotente. Seien $V_1, \dots, V_n \subset kG$ die irreduziblen Moduln zu den Darstellungen und $A_{i,j} := (\delta_i \otimes \delta_j)(kG \otimes kG)$ die homogene Komponente von $kG \otimes kG \cong k(G \times G)$ zu dem Modul $V_i \otimes V_j$. Dann operiert kG auf $A_{i,j}$ durch $a * h = a\Delta(h)$ und durch $a *_1 h = a\Delta_1(h)$ für alle $h \in G, a \in A_{i,j}$, also durch die Einschränkung auf $V_i \otimes V_j$ auch auf $V_i \otimes V_j$. Somit hat $V_i \otimes V_j$ zwei kG-Modulstrukturen, die wir mit $V_i \otimes V_j$ und $V_i \otimes_1 V_j$ bezeichnen. Ihre Charaktere sind $(\chi_i \otimes \chi_j) \circ \Delta$ und $(\chi_i \otimes \chi_j) \circ \Delta_1$. Da ϕ ein Ringismomorphismus ist, gilt $(\chi_i \otimes \chi_j) \circ \Delta = (\chi_i \otimes \chi_j) \circ \Delta_1$. Die homogene Komponente ist nach dem Satz von Artin-Wedderburn ein voller Matrixring. Sei $\psi : M_d(k) \to A_{i,j}$ der Algebrenisomorphismus. Dann ist $V := k^d \cong V_i \otimes V_j$ als $A_{i,j}$-Modul durch $v * a := v\psi(a)$ für alle $v \in V$, $a \in A_{i,j}$. Damit ist V ein kG-Modul via $v * h = v\psi^{-1}((\delta_i \otimes \delta_j)\Delta(h))$ und via $v *_1 h = v\psi^{-1}((\delta_i \otimes \delta_j)\Delta_1(h))$. Diese sind isomorph, da sie den gleichen Charakter haben. Also existiert eine Matrix $M \in M_d(k)$ mit $(vM * h)M^{-1} = v *_1 h$ für alle $h \in kG$ und $v \in V$. Damit ist $r\psi(M)(\delta_i \otimes \delta_j)\Delta(h)\psi(M)^{-1} = r(\delta_i \otimes \delta_j)\Delta_1(h)$ für alle $h \in kG$ und $r \in V_i \otimes V_j$. Man setze $\Omega_{i,j} := \psi(M) \in A_{i,j}$. Da $V_i \otimes V_j$ der einzige irreduzible $A_{i,j}$-Modul ist und $A_{i,j}$ eine direkte Summe solcher Moduln ist, gilt $\Omega_{i,j}(\delta_i \otimes \delta_j)\Delta(h)\Omega_{i,j}^{-1} = (\delta_i \otimes \delta_j)\Delta_1(h)$ für alle $h \in kG$ und $1 \le i, j \le n$. Setze $\Omega = \sum_{1 \le i,j \le n} \Omega_{i,j}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\Omega\Delta(h)\Omega^{-1} &= \sum_{1 \le i,j \le n} \Omega_{i,j} \sum_{1 \le i',j' \le n} (\delta_{i'} \otimes \delta_{j'})\Delta(h) \sum_{1 \le i'',j'' \le n} \Omega_{i'',j''}^{-1} \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \left(\Omega_{i,j}(\delta_i \otimes \delta_j)\Delta(h)\Omega_{i,j}^{-1}\right) \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} (\delta_i \otimes \delta_j)\Delta_1(h) \\
&= \Delta_1(h)
\end{aligned}$$

für alle $h \in kG$. Das zweite Gleichheitszeichen gilt, weil $\Omega_{i,j}\delta_{i'} \otimes \delta_{j'} = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$ ist und $\delta_{i'} \otimes \delta_{j'}$ zentral ist. Da ϕ ein Ringisomorphismus ist, ist ε das Einselement von $ch_1(kG)$. Also gilt auch $\varepsilon = \varepsilon_1$. Es folgt die Behauptung. □

4.2 Twisten in Gruppenalgebren

Nach Satz 4.1.4 erfüllt ein kounitel Kozykel, der in dem Tensor-Quadrat einer kommutativen Unteralgebra liegt, die von der Antipode auf sich selbst abgebildet wird, alle Bedingungen, so dass die getwistete Hopfalgebra wieder eine Hopfalgebra ist. Im Fall einer Gruppenalgebra mit trivialer Hopfalgebrenstruktur wählen wir als eine solche kommutative Unteralgebra die von einer abelschen Untergruppe erzeugte Unteralgebra. Mit Hilfe der klassischen Kohomologietheorie werden die kounitel Kozykel in Gruppenalgebren abelscher Gruppen mit den 2-Kozykeln in den trivialen Modul in Verbindung gesetzt.

Sei im folgenden G eine endliche Gruppe, $e := exp(G)$ und k ein Körper, der folgende Bedingungen erfüllt:

- die Charakteristik von k teilt nicht die Gruppenordnung
- k enthält eine primitive e-te Einheitswurzel.

Dann ist kG halbeinfach und k nach [CR90, 17.1] ein Zerfällungskörper von kG.

4.2.1 Lemma
Es sei G eine endliche, abelsche Gruppe und $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, k^*)$ die Gruppe der irreduziblen Charaktere von G. Dann ist $\hat{G}$ isomorph zu G.

Beweis: Nach dem Satz für endliche abelsche Gruppen ist $G \cong \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}$ wobei $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen sind. Daraus folgt, dass Elemente $g_1, \ldots, g_r \in G$ existieren mit $\langle g_i \rangle \cong \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ und G das innere direkte Produkt der $\langle g_1 \rangle, \ldots, \langle g_r \rangle$ ist. Es seien ζ_i primitive $p_i^{n_i}$-te Einheitswurzel für $i = 1, \ldots, r$ und $\varphi \in \hat{G}$ eine beliebige Abbildung. Dann gilt $\varphi(g_i) = \zeta_i^{s_i}$ für ein $1 \le s_i \le p_i^{n_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$.
Weiter ist φ durch die $s_1, \ldots, s_r$ eindeutig bestimmt. Es sei $\psi : \hat{G} \to \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}$ mit $\psi(\varphi) = (s_1, \ldots, s_r)$, wenn $\varphi(g_i) = \zeta_i^{s_i}$ ist. Die Abbildung ist injektiv, da jedes Element $\varphi \in \hat{G}$ durch $\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_r)$ eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt existiert zu jedem $(s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}$ eine Abbildung $\varphi \in \hat{G}$ mit $\varphi(g_i) = \zeta_i^{s_i}$ für alle $1 \le i \le r$. Sind $\varphi, \varphi' \in \hat{G}$ mit $\varphi(g_i) = \zeta_i^{s_i}$ und $\varphi'(g_i) = \zeta_i^{s'_i}$, dann gilt $(\varphi \cdot \varphi')(g_i) = \zeta_i^{s_i + s'_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Daraus folgt $\psi(\varphi \cdot \varphi') = (s_1 + s'_1, \ldots, s_r + s'_r) = \psi(\varphi) + \psi(\varphi')$. Somit ist ψ ein Gruppenisomorphismus. □

4.2.2 Bemerkung
Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $\psi : G \to \hat{G}$ ein Isomorphismus von Gruppen. Jedem irreduziblen Charakter $\chi \in \hat{G}$ kann eindeutig ein primitives Idempotent δ_χ in kG zugeordnet werden. Da $\hat{G} \cong G$ ist, kann auch jedem $x \in G$ ein primitives Idempotent $\delta_x := \delta_{\psi(x)}$ in kG zugeordnet werden. Die $(\delta_x)_{x \in G}$ bilden eine Basis von kG, so dass für alle $x, y \in G$ gilt: $\delta_x \delta_y = \delta_{x,y}\delta_x$ und $\sum_{x \in G} \delta_x = 1$. Hierbei bezeichnet $\delta_{x,y}$ das Kronecker Delta. Daraus folgt, dass $(\delta_x \otimes \delta_y)_{x,y \in G}$ eine Basis von $kG \otimes kG$ ist. Jedes Element $\Omega \in kG \otimes kG$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form

$$\Omega = \sum_{x,y \in G} \alpha(x,y)\delta_x \otimes \delta_y \quad \text{für } \alpha(x,y) \in k.$$

Es sei $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra. Dann gilt

$$\Delta(\delta_x) = \sum_{g \in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}x}, \quad \varepsilon(\delta_x) = \delta_{x,1} \quad \text{und} \quad S(\delta_x) = \delta_{x^{-1}} \quad \text{für alle } x \in G.$$

Dazu: Es gilt $\delta_x = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(x)(h^{-1})h$ und damit

$$\sum_{g \in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}x} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h,l \in G} \psi(g)(h^{-1})\psi(g^{-1}x)(l^{-1})h \otimes l$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{h,l\in G}\sum_{g\in G}\psi(g)(h^{-1})\psi(g^{-1})(l^{-1})\psi(x)(l^{-1})h\otimes l\\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G}\psi(g)(l^{-1})\psi(g^{-1})(l^{-1})\psi(x)(l^{-1})l\otimes l\\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G}\psi(x)(l^{-1})l\otimes l\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{l\in G}\psi(x)(l^{-1})l\otimes l\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{l\in G}\psi(x)(l^{-1})\Delta(l)\\
&= \Delta(\delta_x)
\end{aligned}
$$

Wenn man von Schritt 2 nach 3 benutzt, dass $\psi(g^{-1})(l^{-1}) = \psi(g)(l)$ gilt und damit

$$\sum_{g\in G}\psi(g)(h^{-1})\psi(g^{-1})(l^{-1}) = \sum_{g\in G}\psi(g)(h^{-1})\psi(g)(l) = 0$$

für $l \neq h$ ist, nach der Orthogonalitätsrelation.
Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\delta_x) &= \varepsilon\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})h\right)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})\varepsilon(h)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})\\
&= \delta_{x,1}
\end{aligned}
$$

mit der Orthogonalitätsrelation.
Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
S(\delta_x) &= S\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})h\right)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})S(h)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x)(h^{-1})h^{-1}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\psi(x^{-1})(h)h^{-1}\\
&= \delta_{x^{-1}}.
\end{aligned}
$$

4.2.3 Definition
Sei G eine Gruppe und k ein beliebiger Körper. Ein **2-Kozykel** von G in $k^* := k \setminus \{0\}$ ist eine Abbildung $\omega : G \times G \to k^*$ mit den Eigenschaften:

- $\omega(v,w)\omega(u,vw) = \omega(u,v)\omega(uv,w)$ für alle $u,v,w \in G$ und
- $\omega(1,x) = \omega(x,1) = 1$ für alle $x \in G$.

Ein 2-Kozykel heißt **symmetrisch**, falls $\omega(v,w)=\omega(w,v)$ für alle $u,w\in G$ ist.

4.2.4 Satz (siehe [Nik98, 2.8])
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe. Dann existiert eine Bijektion zwischen den kounitel Kozykeln $\Omega\in kG\otimes kG$ und den 2-Kozykeln ω in k^*. Die Abbildung $\omega: G\times G\to k^*$ ist genau dann ein 2-Kozykel von G in k^*, wenn $\Omega=\sum_{x,y\in G}\omega(x,y)\delta_x\otimes\delta_y\in kG\otimes kG$ ein kounitel Kozykel ist. Insbesondere gilt: Ω ist genau dann symmetrisch, wenn ω symmetrisch ist.

Beweis: Ein Element $\Omega:=\sum_{x,y\in G}\omega(x,y)\delta_x\otimes\delta_y\in kG\otimes kG$ ist genau dann invertierbar, wenn $\omega(x,y)\in k^*$ für alle $x,y\in G$. Dann ist $\Omega^{-1}=\sum_{x,y\in G}\omega(x,y)^{-1}\delta_x\otimes\delta_y$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\Omega\otimes 1)(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Omega) &= \sum_{x,y,z,t\in G}\omega(z,t)\omega(x,y)\sum_{g\in G}\delta_z\delta_g\otimes\delta_t\delta_{g^{-1}x}\otimes\delta_y\\ &= \sum_{x,y,g\in G}\omega(g,g^{-1}x)\omega(x,y)\delta_g\otimes\delta_{g^{-1}x}\otimes\delta_y\\ &= \sum_{u,v,w\in G}\omega(u,v)\omega(uv,w)\delta_u\otimes\delta_v\otimes\delta_w.\end{aligned}$$

wenn man $u:=g$ und $v:=g^{-1}x$ und $w:=y$ setzt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}(1\otimes\Omega)(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Omega) &= \sum_{x,y,z,t\in G}\omega(z,t)\omega(x,y)\sum_{g\in G}\delta_x\otimes\delta_z\delta_g\otimes\delta_t\delta_{g^{-1}y}\\ &= \sum_{x,y,g\in G}\omega(g,g^{-1}y)\omega(x,y)\delta_x\otimes\delta_g\otimes\delta_{g^{-1}y}\\ &= \sum_{u,v,w\in G}\omega(v,w)\omega(u,vw)\delta_u\otimes\delta_v\otimes\delta_w.\end{aligned}$$

wenn man $u:=x$ und $v:=g$ und $w:=g^{-1}y$ setzt.
Offensichtlich ist $(1\otimes\Omega)(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Omega)=(\Omega\otimes 1)(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Omega)$ genau dann, wenn $\partial\Omega=1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\omega(v,w)\omega(u,vw)=\omega(u,v)\omega(uv,w)$ für alle $u,v,w\in G$ ist.
Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Omega) &= \sum_{x,y\in G}\omega(x,y)\varepsilon(\delta_x)\otimes\delta_y\\ &= \sum_{y\in G}\omega(1,y)1\otimes\delta_y\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\Omega) &= \sum_{x,y\in G}\omega(x,y)\delta_x\otimes\varepsilon(\delta_y)\\ &= \sum_{x\in G}\omega(x,1)\delta_x\otimes 1.\end{aligned}$$

Es gilt also genau dann $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\Omega)=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Omega)=1$, wenn $\omega(x,1)=\omega(1,x)=1$ für alle $x\in G$ gilt.
Somit ist Ω genau dann ein kounitel Kozykel, wenn die durch die Koeffizienten von Ω zur Basis $(\delta_x\otimes\delta_y)_{x,y\in G}$ definierte Abbildung $\omega: G\times G\to k$ ein Kozykel von G nach k^* ist. □

4.2.5 Bemerkung
Sei H eine abelsche Untergruppe von G und $(kG,m,n,\Delta,\varepsilon,S)$ die triviale Hopfalgebra. Es sei $\Omega=\sum_{x,y\in H}\omega(x,y)\delta_x\otimes\delta_y$ mit $\omega(x,y)\in k^*$ für alle $x,y\in H$ ein kounitel Kozykel. Da kH kommutativ

ist, sind alle Bedingungen aus Satz 4.1.4 erfüllt. Also ist $u := m((\mathrm{id} \otimes S)(\Omega))$ invertierbar und S_Ω mit $S_\Omega(h) := uS(h)u^{-1}$ für alle $h \in kG$ ist eine Antipode zu der Bialgebra $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon)$.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} u &= m(\mathrm{id} \otimes S)(\Omega) \\ &= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x S(\delta_y) \\ &= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \delta_{y^{-1}} \\ &= \sum_{x \in G} \omega(x, x^{-1})\delta_x. \end{aligned}$$

Konjugieren mit einem symmetrischen Twistelement erzeugt aus einer kokommutativen Hopfalgebra wieder eine kokommutative. Unser Interesse gilt also hauptsächlich den nicht-symmetrischen kounitel Kozykeln. Die nicht-symmetrischen kounitel Kozykeln stehen im Fall einer kommutativen Gruppenalgebra in Bijektion zu den nicht-symmetrischen 2-Kozykeln. Das folgende Beispiel gibt einige nicht-symmetrische 2-Kozykeln abelscher Gruppen an.

4.2.6 Beispiel (vgl. [Nik98, 2.9])
Es sei $G := C_p \times C_p$ eine elementar-abelsche Gruppe vom Rang 2. Es sei $p \neq 2$ und $\zeta \in k$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Dann ist $\omega : G \times G \to k^*, \omega((i,j),(k,l)) = \zeta^{il-jk}$ ein nicht-symmetrischer 2-Kozykel von G in k^*.
Es sei ζ eine primitive 4-te Einheitswurzel. Im Fall $p = 2$ liefert $\omega : G \times G \to k^*$ mit

$$\begin{aligned} \omega(s,t) &= \omega(t,st) = \omega(st,s) = \zeta \quad \text{für Erzeuger } s,t \in G \\ \omega(1,u) &= \omega(u,1) = \omega(u,u) = 1 \quad \text{für alle } u \in G \\ \omega(v,u) &= \omega(u,v)^{-1} \quad \text{für alle } u,v \in G \end{aligned}$$

einen nicht-symmetrischen 2-Kozykel von G in k^*.

Da zyklische Gruppen nur symmetrische 2-Kozykeln besitzen, sind die elementar-abelschen Gruppen vom Rang 2 aus Beispiel 4.2.6 die kleinsten abelschen Gruppen, die einen nicht-symmetrischen 2-Kozykel besitzen.
Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung dafür, dass die getwistete Hopfalgebra einer Gruppenalgebra mit trivialer Hopfalgebrenstruktur nicht kokommutativ ist.

4.2.7 Satz (vgl. [Nik98, 2.10])
Es sei G eine endliche Gruppe, k ein beliebiger Körper, $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra, H eine abelsche Untergruppe von G und F der größte Normalteiler von G, den H enthält (dieser ist eindeutig bestimmt: es gilt $F = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$). Es sei $\Omega \in kH \otimes kH$ ein Pseudo-Kozykel von $kG \otimes kG$. Weiter sei $\pi : kH \to k(H/F)$ die kanonische Surjektion. Gilt $(\pi \otimes \pi)(\Omega) \neq \pm(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega))$, dann ist Δ_Ω nicht kokommutativ. (Bei [Nik98, 2.10] steht nur $(\pi \otimes \pi)(\Omega) \neq (\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega))$.)

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass aus $(\pi \otimes \pi)(\Omega) = a(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega))$ für ein $a \in k$ folgt, dass $a = \pm 1$ ist. Es gilt $(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega)) = \tau(\pi \otimes \pi)(\Omega)$. Seien $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ die Elemente von H/F, dann bilden sie eine Basis von $k(H/F)$. Ist $(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega)) = \sum_{i,j=1}^n \omega(x_i, x_j) x_i \otimes x_j$ mit $\omega(x_i, x_j) \in k$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, dann ist $(\pi \otimes \pi)(\Omega) = \sum_{i,j=1}^n \omega(x_i, x_j) x_j \otimes x_i$. Da Ω eine Einheit und $\pi \otimes \pi$ ein Algebrenhomomorphismus ist, ist auch $(\pi \otimes \pi)(\Omega)$ eine Einheit. Also ist ein $\omega(x_i, x_j) \neq 0$ und a ist ungleich 0. Dann gilt aber $\sum_{i,j=1}^n a\omega(x_i, x_j) x_i \otimes x_j = a(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega)) = (\pi \otimes \pi)(\Omega) = \sum_{i,j=1}^n \omega(x_i, x_j) x_j \otimes x_i$ und damit $a\omega(x_i, x_j) = \omega(x_j, x_i) = a^{-1}\omega(x_i, x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Es gilt also $a^2 = 1$.
Es sei $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) = \sum_{g,h \in G} \alpha(g,h) g \otimes h$, wobei $\alpha(g,h) = 0$ für alle $(g,h) \notin H \times H$ ist. Aus $(\pi \otimes \pi)(\Omega) \neq \pm(\pi \otimes \pi)(\tau(\Omega))$ folgt $(\pi \otimes \pi)(\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)) \neq \pm 1 \otimes 1$. Angenommen es gelte

$\alpha(g,h) = 0$ für alle Paare $(g,h) \notin F \times F$. Dann ist $(\pi \otimes \pi)(\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)) = a1 \otimes 1$. Aus dem ersten Teil folgt dann $a = \pm 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muss also ein Paar $(g,h) \notin F \times F$ mit $\alpha(g,h) \neq 0$ geben. Da F der größte Normalteiler von G in H ist, existiert ein $t \in G$, so dass $(tgt^{-1}, tht^{-1}) \notin H \times H$ ist. Hieraus folgt $\alpha(tgt^{-1}, tht^{-1}) = 0$.
Angenommen es sei $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \in Z(\Delta(kG))$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y \in G} \alpha(x,y) x \otimes y &= \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \\
&= \Delta(t^{-1})(\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega))\Delta(t) \\
&= (t^{-1} \otimes t^{-1})(\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega))(t \otimes t) \\
&= \sum_{x,y \in G} \alpha(x,y)(t^{-1}xt \otimes t^{-1}yt) \\
&= \sum_{x,y \in G} \alpha(txt^{-1}, tyt^{-1}) x \otimes y,
\end{aligned}$$

und somit durch Koeffizientenvergleich $\alpha(tgt^{-1}, tht^{-1}) = \alpha(g,h) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \notin Z(\Delta(kG))$. Mit Satz 4.1.5 folgt die Behauptung. □

4.2.8 Bemerkung
Sei $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra. Weiter seien alle Voraussetzungen von Satz 4.2.7 erfüllt und Ω zusätzlich kounitel. Dann ist $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine nicht kokommutative Hopfalgebra. Insbesondere ist die Mächtigkeit der Menge ihrer gruppen-ähnlichen Elemente echt kleiner als die Mächtigkeit von G.

4.2.9 Korollar
Es sei G eine endliche Gruppe und H eine abelsche Untergruppe von G, die keinen nicht-trivialen Normalteiler von G enthält. Mit $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ bezeichnen wir die triviale Hopfalgebra. Ist $\Omega \in kH \otimes kH$ ein nicht-symmetrischer kounitel Pseudo-Kozykel, dann ist $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine nicht kokommutative Hopfalgebra.

Beweis: Da H keinen nicht-trivialen Normalteiler aus G enthält, ist F aus Satz 4.2.7 die triviale Gruppe und $\pi = \mathrm{id}$. Nach der Definition des Kozykel ist der Fall $\Omega = -\tau(\Omega)$ nicht möglich, da $\omega(x,1) = \omega(1,x) = 1$ für alle $x \in H$ gilt. Da $\Omega \neq \tau(\Omega)$ ist, folgt aus Satz 4.2.7 die Behauptung. □

4.2.10 Bemerkung
Sei G eine endliche Gruppe und $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine Hopfalgebra, die durch Twisten aus der trivialen Hopfalgebra $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ entsteht. Dann sind alle Elemente aus $Z(G)$ gruppen-ähnliche Elemente, da $\Delta(Z(G)) \subset Z(G) \otimes Z(G) \subset Z(kG \otimes kG)$ und damit

$$\Delta_\Omega(g) = \Omega\Delta(g)\Omega^{-1} = \Delta(g) = g \otimes g$$

für alle $g \in Z(G)$ gilt. Ist Δ_Ω nicht kokommutativ, dann gilt für die Anzahl der gruppen-ähnlichen Elemente: $|Z(G)| \leq |G(kG)| < |G|$.

4.3 Twisten im Fall einiger spezieller Gruppen

Sei k ein Körper mit den Eigenschaften aus dem vorhergehenden Abschnitt.

4.3.1 Lemma (vgl. [Hof00])
Es sei G eine endliche, nicht-abelsche, einfache Gruppe. Dann besitzt G eine abelsche Untergruppe H mit $H \cong C_2 \times C_2$.

Für den Beweis dieses Lemmas benutzen wir:

4.3.2 Theorem (Glaubermans Z^*-Theorem)
Es sei G eine endliche Gruppe, $t \in G$ eine Involution, $O_{2'}(G)$ der größte Normalteiler von G ungerader Ordnung und $G^* := G/O_{2'}(G)$. Gilt $t^G \cap C_G(t) = \{t\}$, dann ist $t^* \in Z(G^*)$.

Beweis von Lemma 4.3.1: Da G eine einfache, nicht-abelsche Gruppe ist, ist $|G|$ nach dem Satz von Feit-Thompson gerade. Daraus folgt, dass G eine Involution $t \in G$ besitzt und $O_{2'}(G)$ die triviale Gruppe ist. Damit ist $G^* = G$. Angenommen es sei $t^G \cap C_G(t) = \{t\}$, so folgt aus Satz 4.3.2, dass t in $Z(G)$ liegt. Da G einfach und nicht-abelsch ist, gilt $Z(G) = \{1\}$. Dies ist ein Widerspruch. Es existiert also ein $t^g \in C_G(t) \setminus \{t\}$ für ein $g \in G$. Dann ist $\langle t, t^g \rangle \cong C_2 \times C_2$ die gesuchte Untergruppe.
□

4.3.3 Satz (vgl. [Hof00, Lemma1])
Es sei G eine endliche, nicht-abelsche, einfache Gruppe. Dann existiert eine nicht kokommutative Hopfalgebrenstruktur auf kG.

Beweis: Es sei $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra. Nach Lemma 4.3.1 besitzt G eine elementar-abelsche Untergruppe H vom Rang 2. Jede elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2 besitzt nach Beispiel 4.2.6 einen nicht-symmetrischen 2-Kozykel ω in k^* und somit existiert nach Satz 4.2.4 ein nicht-symmetrischer kounitel Kozykel $\Omega \in kH \otimes kH$. Mit Korollar 4.2.9 folgt, dass $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine nicht kokommutative Hopfalgebra ist. □

4.3.4 Korollar
Sei G eine endliche Gruppe, die eine einfache, nicht-abelsche Untergruppe N besitzt. Dann existiert eine nicht kokommutative Hopfalgebrenstruktur auf kG.

Beweis: Es sei $(kG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebra. Da N einfach und nicht-abelsch ist, enthält N nach Lemma 4.3.1 eine elementar-abelsche Untergruppe H vom Rang 2, die keinen Normalteiler von N, also auch keinen Normalteiler von G enthält. Nach Beispiel 4.2.6 und Satz 4.2.4 existiert also ein nicht-symmetrischer kounitel Kozykel $\Omega \in kH \otimes kH$. Mit Korollar 4.2.9 folgt, dass $(kG, m, n, \Delta_\Omega, \varepsilon, S_\Omega)$ eine nicht kokommutative Hopfalgebra ist. □

Für jede Gruppenalgebra einer nicht-abelschen Gruppe G, die eine elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2 besitzt, welche keinen Normalteiler der Gruppe enthält, kann durch Twisten der trivialen Hopfalgebra eine nicht kokommutative Hopfalgebra erzeugt werden. Wir untersuche im Folgenden Gruppen, die diese Eigenschaften nicht erfüllen, für die also entweder 1. oder 2. zutreffen:

1. Es existiert keine Untergruppe, die elementar-abelsch vom Rang mindestens 2 ist.

2. Jede elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2 enthält einen Normalteiler der Gruppe.

Angenommen die Gruppe erfüllt Bedingung 1 oder 2. Dann erfüllt auch jede p-Sylowgruppe 1 oder 2. Findet man umgekehrt einen kounitel Pseudo-Kozykel einer p-Sylowgruppe, der die Bedingungen aus Satz 4.1.4 erfüllt und eine nicht kokommutative Hopfalgebra erzeugt, so gilt dies auch für die gesamte Gruppe. Wir können uns bei der Untersuchung also auf p-Gruppen zurückziehen.

4.3.5 Lemma
Eine p-Gruppe G besitzt genau dann eine elementar-abelsche Untergruppe vom Rang mindestens 2, wenn G eine abelsche, nicht-zyklische Untergruppe besitzt.

Beweis: Jede elementar-abelsche Gruppe vom Rang mindestens 2 ist nicht-zyklisch. Sei umgekehrt U eine abelsche, nicht-zyklische Untergruppe. Nach dem Satz für endlich-erzeugte abelsche Gruppen ist U das direkte Produkt zweier nicht-trivialer p-Gruppen. Also enthält U eine elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2. □

4.3.6 Satz (vgl. [Kur77, 4.13])
Sei G eine endliche p-Gruppe, deren abelsche Untergruppen zyklisch sind. Dann ist G zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. □

4.3.7 Bemerkung
Mit Lemma 4.3.5 und Satz 4.3.6 folgt, dass jede endliche, nicht-abelsche p-Gruppe genau dann keine elementar-abelsche Untergruppe vom Rang mindestens 2 besitzt, wenn sie eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. Die endlichen nicht-abelschen Gruppe, die Bedingung 1 erfüllen, sind also genau die Gruppen, deren p-Sylowgruppen zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen sind.

4.3.8 Definition
Es sei G eine endliche p-Gruppe. Dann ist $\Omega_i(G) := \left\langle x \in G \mid x^{p^i} = 1 \right\rangle$.

4.3.9 Lemma
Es sei G eine endliche p-Gruppe. Dann ist $\Omega_i(G)$ eine charakteristische Untergruppe von G und jede elementar-abelsche Untergruppe von G ist in $\Omega_1(G)$ enthalten. □

4.3.10 Satz
Sei G eine nicht-abelsche, endliche p-Gruppe, $p \neq 2$, mit einer maximalen Untergruppe, die zyklisch ist. Dann ist $\Omega_1(G)$ eine elementar-abelsche Gruppe vom Rang 2. Damit ist $\Omega_1(G)$ nach Lemma 4.3.9 die einzige elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2 und ein Normalteiler von G.

Beweis: Sei $|G| = p^n$. Nach Satz [Hup67, 14.9] ist G das semi-direkte Produkt der maximalen zyklischen Gruppe $\langle x \rangle$ mit einer Gruppe $\langle s \rangle$ der Ordnung p mit $x^s = x^{1+p^{n-1}}$. Die Gruppe G ist nilpotent, also ist jede maximale Untergruppe ein Normalteiler. Nach Satz [Kur77, 4.4] gilt für jeden maximalen abelschen Normalteiler N einer p-Gruppe H, dass $C_H(N) = N$ ist. Damit ist $C_G(\langle x \rangle) \subset \langle x \rangle$ also $Z(G) \subset \langle x \rangle$. Da $sx^p s^{-1} = x^p$ gilt, muss $\langle x^p \rangle \subset Z(G)$ sein. Da G nicht-abelsch ist, gilt $Z(G) = \langle x^p \rangle$. Damit ist $|G/Z(G)| = p^2$. Es folgt, dass $G/Z(G)$ abelsch ist. Nach Satz [Kur77, 4.8] ist also $(gh)^p = g^p h^p$ für alle $g, h \in G$. Also ist $\psi : G \to G, g \mapsto g^p$ ein Endomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\psi) = \Omega_1(G) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Da $\mathrm{Bild}(\psi) = \langle x^p \rangle$ ist, folgt $|\Omega_1(G)| = p^2$. Da alle Elemente in $\Omega_1(G)$ Ordnung p haben, ist $\Omega_1(G)$ eine elementar-abelsche Gruppe vom Rang 2. Zum 2. Teil der Behauptung: Da jede elementar-abelsche Untergruppe vom Rang 2 nach Lemma 4.3.9 in $\Omega_1(G)$ enthalten ist, ist sie nach dem ersten Teil auch gleich $\Omega_1(G)$. Da $\Omega_1(G)$ eine charakteristische Untergruppe von G ist, ist sie insbesondere ein Normalteiler von G. □

4.3.11 Satz (siehe [Hup67, 14.9])
Sei G eine nicht-abelsche endliche 2-Gruppe mit $|G| = 2^n$, die eine maximale zyklische Untergruppe besitzt. Dann ist G entweder

1. eine Diedergruppe, $G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{-1} \right\rangle$
2. eine Verallgemeinerte Quaternionengruppe,
$$G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = 1, s^2 = x^{2^{n-2}}, sxs^{-1} = x^{-1} \right\rangle$$
3. eine Quasi-Diedergruppe, $G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{-1+2^{n-2}} \right\rangle$
4. $G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{1+2^{n-2}} \right\rangle$.

□

4.3.12 Satz (Twisten in den Fällen von Satz 4.3.11)
Die Diedergruppe der Ordnung $4n,\ n \geq 2$, die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung $4n,\ n \geq 2$, die Quasi-Diedergruppe der Ordnung $2^n,\ n \geq 3$ und die Gruppe

$$G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{1+2^{n-2}} \right\rangle$$

der Ordnung $2^n,\ n \geq 4$ besitzen eine nicht kokommutative Hopfalgebrenstruktur, die durch Twisten aus der trivialen Hopfalgebra hervorgeht.

Beweis:

1. Vergleiche [Nik98, 5.3]. Im Fall dass $G = \langle x, s \mid x^{2n} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{-1} \rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung $4n$ ist, ist $N = \{x^{n+1}s, xs, x^n, 1\}$ eine abelsche Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mit dem in Beispiel 4.2.6 beschriebenen nicht-symmetrischen Kozykel der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kann man sich einen nicht-symmetrischen kounitel Kozykel wie in Satz 4.2.4 konstruieren und erhält mit $b := x^n,\ c = xs$:

   $$\begin{aligned} \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \quad = \quad & 1/4[1 \otimes 1 + 1 \otimes c + 1 \otimes b + 1 \otimes cb \\ & +c \otimes 1 + c \otimes c - c \otimes b - c \otimes cb \\ & +b \otimes 1 - b \otimes c + b \otimes b - b \otimes cb \\ & +cb \otimes 1 - cb \otimes c - cb \otimes b + cb \otimes cb]. \end{aligned}$$

   Weiter gilt $x^{-1}bx = b$, $x^{-1}cx = x^{-1}s$ und $x^{-1}bcx = x^{n-1}s$. Man rechnet nach, dass

   $$(x^{-1} \otimes x^{-1}) \cdot (\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)) \cdot (x \otimes x) \neq \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)$$

   ist. Also ist $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \notin Z(\Delta(kG))$. Nach Satz 4.1.5 ist die neue Komultiplikation Δ_Ω nicht kokommutativ.

2. Siehe [Nik98, 5.4].

3. Sei $G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{-1+2^{n-2}} \right\rangle$ eine Quasi-Diedergruppe. Nach Satz [Kur77, 4.4] ist $Z(G) \subset \langle x \rangle$. Es gilt genau dann $x^l \in Z(G)$, wenn $sx^ls^{-1} = x^l$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $l = -l + l2^{n-2} \operatorname{Mod} 2^{n-1}$. Also ist $Z(G) = \left\langle x^{2^{n-2}} \right\rangle$. Sei $b := x^{2^{n-2}}$, dann ist $N = \{1, s, b, sb\}$ eine Untergruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Verwendet man den Kozykel aus Beispiel 4.2.6, so erhält man den kounitel Kozykel Ω. Man rechnet nach, dass

   $$\begin{aligned} \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \quad = \quad & 1/4[1 \otimes 1 + 1 \otimes s + 1 \otimes b + 1 \otimes sb \\ & +s \otimes 1 + s \otimes s - s \otimes b - s \otimes sb \\ & +b \otimes 1 - b \otimes s + b \otimes b - b \otimes sb \\ & +sb \otimes 1 - sb \otimes s - sb \otimes b + sb \otimes sb] \end{aligned}$$

   gilt. Es gilt $xbx^{-1} = b$, $xsx^{-1} = sbx^{-2}$ und $xsbx^{-1} = sx^{-2}$. Also ist

   $$(x \otimes x) \cdot (\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)) \cdot (x^{-1} \otimes x^{-1}) \neq \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega)$$

   und damit $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \notin Z(\Delta(kG))$. Die neue Komultiplikation Δ_Ω ist nach Satz 4.1.5 nicht kokommutativ.

4. Sei $G = \left\langle x, s \mid x^{2^{n-1}} = s^2 = 1, sxs^{-1} = x^{1+2^{n-2}} \right\rangle$, $n \geq 4$. Dann ist $Z(G) = \langle x^2 \rangle$. Sei $c := x^{2^{n-3}}$ und $b := c^3s$. Es gilt $b^2 = c^6 \in Z(G)$, $b^3 = c^9s$, und $b^4 = 1$. Dann ist $B := \langle b \rangle \cong C_4$. Man definiere den Pseudo-Kozykel $\omega : B \otimes B \to k$ durch:

- $\omega(b, b^2) = \omega(b^2, b^3) = \omega(b^3, b) = i$
- $\omega(1, l) = \omega(l, 1) = \omega(l, l) = 1$
- $\omega(r, l) = \omega(l, r)^{-1}$ für alle $l, r \in B$.

Mit der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 4.2.4 erhält man ein Element Ω aus der Einheitengruppe von $kB \otimes kB$. Dann ist Ω kounitel, denn $\omega(1, l) = \omega(l, 1) = 1$ für alle $l \in B$. Es bleibt zu prüfen, ob Ω erstens ein Pseudo-Kozykel ist und zweitens eine nicht kokommutative Hopfalgebra erzeugt. Man rechnet nach, dass $\delta\Omega = 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1/4(1-b^2) \otimes (1-b^2) \otimes (1-b^2)$ gilt. Da $b^2 = c^2 \in Z(G)$ ist, ist auch $\delta\Omega$ ein Element des Zentrums von $kG \otimes kG \otimes kG$. Also ist Ω ein kounitel Pseudo-Kozykel von kG. Weiter rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \quad = \quad & 1/4[1 \otimes 1 + 1 \otimes b + 1 \otimes b^2 + 1 \otimes b^3 \\
& + b \otimes 1 - b \otimes b - b \otimes b^2 + b \otimes b^3 \\
& + b^2 \otimes 1 - b^2 \otimes b + b^2 \otimes b^2 - b^2 \otimes b^3 \\
& + b^3 \otimes 1 + b^3 \otimes b - b^3 \otimes b^2 - b^3 \otimes b^3]
\end{aligned}$$

gilt. Es gilt: $xbx^{-1} = cs$, $xb^2x^{-1} = b^2$ und $xb^3x^{-1} = c^7s$. Damit ist

$$\begin{aligned}
(x \otimes x) \cdot (\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega))(x^{-1} \otimes x^{-1}) \quad = \quad & 1/4[1 \otimes 1 + 1 \otimes cs + 1 \otimes b^2 + 1 \otimes c^7s \\
& + cs \otimes 1 - cs \otimes cs - cs \otimes b^2 + cs \otimes c^7s \\
& + b^2 \otimes 1 - b^2 \otimes cs + b^2 \otimes b^2 - b^2 \otimes c^7s \\
& + c^7s \otimes 1 + c^7s \otimes b - c^7s \otimes b^2 - c^7s \otimes c^7s] \\
& \neq \Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega),
\end{aligned}$$

da die Elemente c^7s und cs keine Elemente von B sind. Also ist $\Omega^{-1} \cdot \tau(\Omega) \notin Z(\Delta(kG))$. Es folgt, dass Δ_Ω nach Satz 4.1.5 nicht kokommutativ ist. □

4.3.13 Bemerkung

1. Sei G eine quadratfreie Gruppe, d.h. es existiert keine Primzahl p, so dass p^2 ein Teiler von $|G|$ ist. Dann sind alle abelschen Untergruppen von G zyklisch. Da alle 2-Kozykel zyklischer Gruppen symmetrisch sind, existiert kein unsymmetrischer kounitel Kozykel einer abelschen Untergruppe.

2. Die Hopfalgebrenstruktur von Gruppenalgebren abelscher Gruppen kann durch Twisten nicht verändert werden. Insofern ist nicht jede Hopfalgebrenstruktur einer endlichen Gruppe ein Twist der trivialen Hopfalgebrenstruktur.

4.3.14 Beispiel

Seien G und H Gruppen der Ordnung 32, die in der GAP Library der Small Groups unter Nummer 13 bzw. 14 zu finden sind. Dann sind $\mathbb{C}G$ und $\mathbb{C}H$ als Algebren isomorph, da H und G die gleichen Charaktergrade haben. Also hat $\mathbb{C}G$ eine Gruppenbasis $\bar{H}$, die isomorph zu H ist. Seien H_1 bzw. H_2 die trivialen Hopfalgebrenstrukturen auf $\mathbb{C}G$ zu den Gruppenbasen G und $\bar{H}$. Seien ch_1 und ch_2 die Charakterringe zu den Hopfalgebren H_1 bzw. H_2. Dann sind diese nicht isomorph. Nach Satz 4.1.6 gehen H_1 und H_2 also nicht durch Twisten auseinander hervor.

Kapitel 5

Beispiele von Hopfalgebren

5.1 Beispiele von Hopfalgebren in Körpern positiver Charakteristik

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich die Ergebnisse aus Kapitel 3 im Allgemeinen nicht auf Hopfalgebren über Körpern positiver Charakteristik übertragen lassen. Es existieren nämlich kokommutative Hopfalgebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern positiver Charakteristik, die außer der 1 kein gruppen-ähnliches Element besitzen. Eine Hopfalgebrenstruktur auf der universell Einhüllenden einer Lie-Algebra ist dabei von zentraler Bedeutung.
Wir leiten zunächst einige im weiteren Verlauf benötigte Hilfssätze her.

5.1.1 Lemma
Es sei H eine Algebra und I ein zweiseitiges Ideal von H. Dann ist $I \otimes H + H \otimes I$ ein zweiseitiges Ideal in $H \otimes H$ und $H/I \otimes H/I$ ist isomorph zu $(H \otimes H)/(I \otimes H + H \otimes I)$ als Algebra.

Beweis: Es sei $\varphi : H \otimes H \to H/I \otimes H/I$ mit $\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \mapsto \sum_{(h)}(h_{(1)} + I) \otimes (h_{(2)} + I)$ der kanonische Algebrenhomomorphismus. Jedes Element $h \in I \otimes H$ hat eine Darstellung der Form $h = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, wobei die $h_{(1)}$ in I liegen. Also liegt $I \otimes H$ im Kern von φ.
Genauso folgt, dass $H \otimes I \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ ist und damit liegt auch $I \otimes H + H \otimes I$ im Kern von φ.
Somit ist $\bar{\varphi} : (H \otimes H)/(I \otimes H + H \otimes I) \to H/I \otimes H/I$ mit $\bar{\varphi}(x + (I \otimes H + H \otimes I)) = \varphi(x)$ wohldefiniert und ein Algebrenhomomorphismus.
Es sei $\psi : H/I \otimes H/I \to (H \otimes H)/(I \otimes H + H \otimes I)$ mit $\sum_{(h)}(h_{(1)} + I) \otimes (h_{(2)} + I) \mapsto \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} + (I \otimes H + H \otimes I)$ gegeben. Dann ist ψ wohldefiniert und ψ ist ein Algebrenhomomorphismus mit der Eigenschaft $\psi \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}$ und $\bar{\varphi} \circ \psi = \mathrm{id}$. Somit ist $\bar{\varphi}$ ein Algebrenisomorphismus. □

5.1.2 Satz
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra und I ein zweiseitiges Ideal in H mit den Eigenschaften

- $\Delta(I) \leq I \otimes H + H \otimes I$
- $\varepsilon(I) = \{0\}$
- $S(I) \leq I$

Dann ist $(H/I, \Delta', \varepsilon', S')$ mit der kanonischen Algebrenstruktur eine Hopfalgebra wobei:

- $\Delta'(h + I) := \psi^{-1}(\Delta(h) + (I \otimes H + H \otimes I))$
- $\varepsilon'(h + I) := \varepsilon(h)$
- $S'(h + I) := S(h) + I$

Beweis: Nachrechnen. □

5.1.3 Beispiel (Eine Hopfalgebrenstruktur der universell Einhüllenden)

1. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper k und TV die von V erzeugte Tensoralgebra. Dann liefert

   - $\Delta(l) := l \otimes 1 + 1 \otimes l \in TV \otimes TV$
   - $\varepsilon(l) := 0 \in k$
   - $S(l) := -l \in TV$

   für alle $l \in V$ eine Hopfalgebrenstruktur auf TV, wenn man Δ und ε als Algebrenhomomorphismus und S als Antialgebrenhomomorphismus auf TV fortsetzt.

2. Es sei L eine Lie-Algebra über einem Körper k und UL die universell Einhüllende von L. Das Tensorprodukt der Multiplikation in TL bezeichnen wir mit $\boxtimes$. Dann ist $UL = TL/I$ mit $I := \langle a \boxtimes b - b \boxtimes a - [a, b] \mid a, b \in L\rangle$. Es sei $^{-} : L \to UL,\ l \to \bar{l}$ die Einbettung von L in UL. Dann liefert

   - $\Delta'(\bar{l}) := \bar{l} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{l} \in UL \otimes UL$
   - $\varepsilon'(\bar{l}) := 0 \in k$
   - $S'(\bar{l}) := -\bar{l} \in UL$

   für alle $l \in L$ eine Hopfalgebrenstruktur auf UL.

Beweis:

1. Da die obigen Abbildungen auf V linear sind, folgt aus der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra, dass sich Δ und ε auf TV als Algebrenhomomorphismen eindeutig fortsetzen lassen. Es sei $\tau : TV \to TV$ der durch $a_1 \boxtimes \cdots \boxtimes a_n \mapsto a_n \boxtimes a_{n-1} \boxtimes \cdots \boxtimes a_2 \boxtimes a_1$ für alle $a_i \in V, 1 \leq i \leq n$ und $n \in \mathbb{N}$ definierte Antialgebrenhomomorphismus. Die lineare Abbildung $\bar{S} : TV \to TV, l \mapsto -l$ mit $l \in V$ läßt sich eindeutig zu einem Algebrenhomomorphismus auf TV fortsetzen. Also ist $S := \tau \circ \bar{S}$ als Antialgebrenhomomorphismus eindeutig auf TV fortsetzbar. Es genügt dann nachzurechnen, dass Δ, ε, S die Hopfalgebren-Eigenschaften auf $V \subset TV$ erfüllen.

2. Wir zeigen, dass für Δ, ε, S aus 1. gilt:

   - $\Delta(I) = I \otimes TL + TL \otimes I$
   - $\varepsilon(I) = 0$
   - $S(I) \subset I$

   Da I ein zweiseitiges Ideal ist, genügt es, dies für die Erzeuger von I nachzurechnen. Sei also $i := a \boxtimes b - b \boxtimes a - [a, b] \in I$ ein beliebiger Erzeuger in I mit $a, b \in L$. Mit $*$ bezeichnen wir die Multiplikation in $TL \otimes TL$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(i) &= \Delta(a) * \Delta(b) - \Delta(b) * \Delta(a) - \Delta([a, b]) \\
&= (a \otimes 1 + 1 \otimes a) * (b \otimes 1 + 1 \otimes b) - (b \otimes 1 + 1 \otimes b) * (a \otimes 1 + 1 \otimes a) \\
&\quad -[a, b] \otimes 1 - 1 \otimes [a, b] \\
&= (a \boxtimes b) \otimes 1 + b \otimes a + a \otimes b + 1 \otimes (a \boxtimes b) - (b \boxtimes a) \otimes 1 \\
&\quad -a \otimes b - b \otimes a - 1 \otimes (b \boxtimes a) - [a, b] \otimes 1 - 1 \otimes [a, b] \\
&= (a \boxtimes b) \otimes 1 - (b \boxtimes a) \otimes 1 - [a, b] \otimes 1 \\
&\quad +1 \otimes (a \boxtimes b) - 1 \otimes (b \boxtimes a) - 1 \otimes [a, b] \\
&= (a \boxtimes b - b \boxtimes a - [a, b]) \otimes 1 + 1 \otimes (a \boxtimes b - b \boxtimes a - [a, b])
\end{aligned}$$

Damit ist
$$\Delta(i) \in I \otimes TL + TL \otimes I \text{ und } \varepsilon(i) = 0,$$
sowie
$$S(i) = S(b) \boxtimes S(a) - S(a) \boxtimes S(b) - S([a,b]) = b \boxtimes a - a \boxtimes b - [b,a] \in I$$
wenn man benutzt, dass S ein Antialgebrenhomomorphismus ist. Mit Satz 5.1.2 folgt dann die Behauptung. □

Der Vollständigkeit halber zitiere ich ohne Beweis den folgenden

5.1.4 Satz (siehe [Swe69, Theorem 13.0.1])
Sei H eine irreduzible, kokommutative Hopfalgebra über einem Körper der Charakteristik 0. Dann ist H als Hopfalgebra isomorph zu der universell Einhüllenden von $P(H)$ mit der Hopfalgebrenstruktur von Beispiel 5.1.3, Teil 2.

5.1.5 Satz

1. Es sei $k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Unbekannten. Dann ist $k[x_1, \dots, x_n]$ eine Hopfalgebra mit:

   - $\Delta'(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$
   - $\varepsilon'(x_i) = 0$
   - $S'(x_i) = -x_i$

   für alle $1 \leq i \leq n$.

2. Sei k ein Körper der Charakteristik p, $H := k[x_1, \dots, x_n]/\langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle$, $I := \langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle$ und $\bar{x}_i := x_i + I \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist H eine Hopfalgebra mit:

   - $\Delta(\bar{x}_i) = \bar{x}_i \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_i$
   - $\varepsilon(\bar{x}_i) = 0$
   - $S(\bar{x}_i) = -\bar{x}_i$

   für alle $1 \leq i \leq n$.

3. Es sei $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ eine elementar-abelsche Gruppe vom Rang n, p die Primzahl mit $g_i^p = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ und k ein Körper der Charakteristik p. Dann ist kG isomorph zu H aus 2. als k-Algebra und kG ist eine Hopfalgebra mit:

   - $\Delta(g_i) = g_i \otimes 1 + 1 \otimes g_i - 1 \otimes 1$
   - $\varepsilon(g_i) = 1$
   - $S(g_i) = -g_i + 2$

   für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis

1. Der Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ ist die universell Einhüllende der n-dimensionalen abelschen Lie-Algebra. Nach Beispiel 5.1.3, Teil 2. ist $(k[x_1, \dots, x_n], \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra.

2. Wir zeigen, dass I die Bedingungen aus Satz 5.1.2 erfüllt. Es seien $(\Delta', \varepsilon', S')$ die Abbildungen zur Hopfalgebra aus 1. Da Δ' und ε' Algebrenhomomorphismen sind und S' ein Antialgebrenhomomorphismus ist, gilt: $\Delta'(x_i^p) = x_i^p \otimes 1 + 1 \otimes x_i^p \in I \otimes H + H \otimes I$, $\varepsilon'(x_i^p) = 0$ und $S'(x_i^p) = -x_i^p \in I$ für alle $1 \leq i \leq n$. Damit sind die Bedingungen erfüllt und $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ ist eine Hopfalgebra.

3. Sei H wie in Teil 2. Die Gruppenalgebra kG wird als Algebra von $g_1, \ldots, g_n$ erzeugt. Da $(\bar{x}_i + 1)^p = 1 = g_i^p$ ist, ist liefert die Abbildung $\psi : kG \to H$ mit $g_i \mapsto \bar{x}_i + 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ einen eindeutig bestimmten Algebrenhomomorphismus. Da H als Algebra von $\bar{x}_1 + 1, \ldots, \bar{x}_n + 1$ erzeugt wird, ist ψ surjektiv. Da kG und H beide die Dimension n haben, ist ψ bijektiv, also ein Algebrenisomorphismus. Der Rest folgt aus Satz 1.2.17. □

5.1.6 Satz
Es sei $(H, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra wie im 2. Teil von Satz 5.1.5. Dann ist $G(H) = \{1\}$.

Beweis: Es sei A die Menge der n-Tupel mit Einträgen aus $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Dann bildet die Menge $\{\prod_{i=1}^n x_i^{e_i} \mid e \in A\}$ eine Basis von H. Sei $g = \sum_{e \in A} a_e \prod_{i=1}^n x_i^{e_i}$ mit $a_e \in k$ für alle $e \in A$ ein gruppen-ähnliches Element. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{e,l \in A} a_e a_l (\prod_{i=1}^n x_i^{e_i} \otimes \prod_{i=1}^n x_i^{l_i}) &= g \otimes g = \Delta(g) = \sum_{e \in A} a_e \Delta(\prod_{i=1}^n x_i^{e_i}) \\
&= \sum_{e \in A} a_e \prod_{i=1}^n \Delta(x_i^{e_i}) = \sum_{e \in A} a_e \prod_{i=1}^n \Delta(x_i)^{e_i} \\
&= \sum_{e \in A} a_e \prod_{i=1}^n (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i)^{e_i} \\
&= \sum_{e \in A} a_e \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{e_i} \binom{e_i}{j} x_i^j \otimes x_i^{e_i - j} \\
&= \sum_{e \in A} a_e \sum_{\{(j_1, \ldots, j_n) \in (\prod_{i=1}^n [0, e_i]) \bigcap \mathbb{N}^n\}} \prod_{i=1}^n (\binom{e_i}{j_i} x_i^{j_i} \otimes x_i^{e_i - j_i}) \\
&= \sum_{e \in A} a_e \sum_{\{(j_1, \ldots, j_n) \in (\prod_{i=1}^n [0, e_i]) \bigcap \mathbb{N}^n\}} \prod_{i=1}^n \binom{e_i}{j_i} (\prod_{i=1}^n x_i^{j_i} \otimes \prod_{i=1}^n x_i^{e_i - j_i})
\end{aligned}$$

Sei $w \in A$ das Element, welches unter allen Elementen mit Koeffizienten $a_w \neq 0$ die maximale lexikographische Ordnung hat. Angenommen $w \neq (0, \ldots, 0)$. Dann ist der Koeffizient des Elementes $\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \otimes \prod_{i=1}^n x_i^{w_i}$ auf der linken Seite der Gleichung gleich a_w^2. Sei $\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \otimes \prod_{i=1}^n x_i^{w_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{j_i} \otimes \prod_{i=1}^n x_i^{e_i - j_i}$. Dann ist $j_i = w_i$ und $e_i - j_i = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Daraus folgt $j_i \neq 0$ für ein $i \in 1, \ldots, n$ und $e_i = w_i + j_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also ist $e > w$. Damit ist $a_e \prod_{i=1}^n \binom{e_i}{j_i} = 0$, also $a_e = 0$, da $\prod_{i=1}^n \binom{e_i}{j_i} \neq 0$ für $e_i \leq p - 1$. Es folgt durch Koeffizientenvergleich $a_w = 0$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist $w = (0, \ldots, 0)$ und damit ist $g = 1$ das einzige gruppen-ähnliche Element.
□

5.1.7 Bemerkung
Es sei p eine Primzahl, G eine elementar-abelsche p-Gruppe und k ein Körper der Charakteristik p. Dann liefert die Hopfalgebra aus Satz 5.1.5 Teil 3 eine kokommutative Hopfalgebrenstruktur auf kG, die nach Lemma 5.1.6 nur die 1 als gruppen-ähnliches Element besitzt.

5.2 Hopfalgebren über Ringen

5.2.1 Lemma (vgl. [Hig40, Theorem 3])
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe, K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und C der ganze Abschluss von K. Dann sind die Einheiten endlicher Ordnung in CG genau die Elemente der Menge $\{\zeta g \mid g \in G, \zeta \text{ ist eine Einheitswurzel in } C\}$.

5.2.2 Satz
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe, K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und C der ganze Abschluss in K. Ist $(KG, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra mit $G(KG) \subset CG$, dann hat jedes gruppen-ähnliche Element e eine Darstellung der Form $e = \zeta g$ für ein Element $g \in G$ und eine Einheitswurzel ζ mit $\zeta^{|g|} = 1$.

Beweis: Es sei e ein gruppen-ähnliches Element aus CG. Jedes gruppen-ähnliche Element ist eine Einheit endlicher Ordnung. Dann ist nach Lemma 5.2.1 $e = \zeta g$ für eine Einheitswurzel ζ und ein Element $g \in G$. Weiter gilt $1 = \varepsilon(e) = \zeta\varepsilon(g)$, also $\varepsilon(g) = \zeta^{-1}$. Da ε ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt $\zeta^{-|g|} = 1$. □

5.2.3 Bemerkung
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe. Dann sind die Einheiten endlicher Ordnung in $\mathbb{Z}G$ genau die Elemente der Menge

$$\hat{G} := \{\pm g \mid g \in G\}.$$

Alle gruppen-ähnlichen Elemente sind in der Menge

$$\bar{G} := \{\pm g \mid g \in G \text{ und } |g| \text{ ist gerade }\} \cup \{g \mid g \in G \text{ und } |g| \text{ ist ungerade }\}$$

enthalten. □

5.2.4 Satz
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe mit Hopfalgebrenstruktur $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ und $A := \{h \in \mathbb{Z}G \mid \varepsilon(h) = 1\}$. Dann ist Bild $\varepsilon|_{\bar{G}} \subset \{1, -1\}$ und $A \cap \bar{G}$ die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente.

Beweis: Da die Elemente von $\bar{G}$ Einheiten endlicher Ordnung sind und ε ein Algebrenhomomorphismus ist, sind auch die Bilder von Elementen aus $\bar{G}$ Einheiten endlicher Ordnung. Da ± 1 die einzigen Einheiten in $\mathbb{Z}$ sind, folgt Bild $\varepsilon|_{\bar{G}} \subset \{1, -1\}$. Für $a \in \bar{G}$ ist a und damit auch $\Delta(a)$ eine Einheit endlicher Ordnung. Also ist $\Delta(a) = \pm u \otimes v$ mit $u, v \in G$ nach Lemma 5.2.1. Mit der Koeins-Eigenschaft folgt $\pm\varepsilon(u)v = a = \pm\varepsilon(v)u$. Da $a = g$ oder $a = -g$ für ein $g \in G$ ist, folgt $u = v = g$. Sei zusätzlich $a \in A$. Dann ist $\varepsilon(g) = 1$ für $a = g$ und $\varepsilon(g) = -1$ für $a = -g$. Damit ist $\Delta(a) = a \otimes a = g \otimes g$. Also ist a ein gruppen-ähnliches Element. Umgekehrt ist jedes gruppen-ähnliche Element eine Einheit endlicher Ordnung und liegt damit in $\bar{G}$. Da jedes gruppen-ähnliche Element in A ist, folgt die zweite Behauptung. □

5.2.5 Korollar
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe mit Hopfalgebrenstruktur $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$.

1. Hat G ungerade Ordnung, dann ist G die Gruppe der gruppen-ähnlichen Elemente. Damit ist $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ die triviale Hopfalgebrenstruktur.

2. Sei G eine zyklische Gruppe gerader Ordnung mit Erzeuger $g \in G$. Dann ist entweder G oder $-G := \langle -g \rangle \cong G$ die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente. Damit ist $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ isomorph zur trivialen Hopfalgebra.

Beweis:

1. Da G ungerade Ordnung hat, ist $\bar{G} = G$. Da alle Elemente aus G ungerade Ordnung besitzen und Einheiten sind, gilt $\varepsilon(g) = 1$ für alle $g \in G$. Nach Satz 5.2.4 ist G also die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente.

2. Ist $g \in A$, dann ist G die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente und $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ ist die triviale Hopfalgebra. Angenommen $g \notin A$. Dann ist $\varepsilon(g) = -1$ nach Satz 5.2.4. Also ist $-g \in A$ und damit ist $-G$ die Menge der gruppen-ähnlichen Elemente. Setzt man $\phi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ mit $g \mapsto -g$ zu einem Algebrenhomomorphismus fort, dann liefert ϕ einen Hopfalgebrenisomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ und der trivialen Hopfalgebra auf $\mathbb{Z}G$. □

5.2.6 Satz
Es sei G eine endliche, abelsche Gruppe und $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra. Nach dem Satz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen ist $G \cong G_1 \times \langle g_2 \rangle \times \ldots \times \langle g_l \rangle$ mit $G_i := \langle g_i \rangle \cong \mathbb{Z}/2^{n_i}\mathbb{Z}$ für $i = 2, \ldots, l$, wobei die $n_1, \ldots, n_l$ natürliche Zahlen sind und G_1 eine Gruppe ungerader Ordnung. Dann sind die $\mathbb{Z}G_j \leq \mathbb{Z}G$ Unterhopfalgebren für $1 \leq j \leq l$ und $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ ist isomorph zu einer Hopfalgebra des Tensor-Produkt $\mathbb{Z}G_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}G_l$ wie in 1.2.6. Die Hopfalgebrenstrukturen auf $\mathbb{Z}G_j$ für $1 \leq j \leq l$ sind nach Korollar 5.2.5 eindeutig bestimmt und jeweils isomorph zur trivialen Hopfalgebra. Damit ist $(\mathbb{Z}G, m, n, \Delta, \varepsilon, S)$ isomorph zu der trivialen Hopfalgebra.

Beweis: $\mathbb{Z}G$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}G_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}G_l$ als Algebra vermöge des Isomorphismus $\phi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}G_l$ mit $g \mapsto g \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ für alle $g \in G_1$, $g_i \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ für alle $1 \leq i \leq l$. Aus dem Beweis von Satz 5.2.4 folgt, dass $\Delta(g) = \pm g \otimes g$ und $S(g) = \pm g^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt. Damit sind die $\mathbb{Z}G_i \leq \mathbb{Z}G$ Unterhopfalgebren für alle $1 \leq i \leq l$. Der Algebrenhomomorphismus ϕ liefert mit Satz 1.2.17 eine Hopfalgebrenstruktur auf $\mathbb{Z}G_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}G_l$. Da die $\mathbb{Z}G_i \leq \mathbb{Z}G_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}G_n$ für alle $1 \leq i \leq l$ Unterhopfalgebren sind, hat die Hopfalgebra eine Struktur wie in Satz 1.2.6. $\square$

Literaturverzeichnis

[CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990.

[Hig40] Graham Higman. The units of group-rings. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 46:231–248, 1940.

[Hof00] Corneliu Hoffman. On some examples of simple quantum groups. *Comm. Algebra*, 28(4):1867–1873, 2000.

[Hup67] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Kur77] Hans Kurzweil. *Endliche Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[LR88] Richard G. Larson and David E. Radford. Semisimple cosemisimple Hopf algebras. *Amer. J. Math.*, 110(1):187–195, 1988.

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[Nik98] Dmitri Nikshych. K_0-rings and twisting of finite-dimensional semisimple Hopf algebras. *Comm. Algebra*, 26(1):321–342, 1998.

[Swe69] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.