Zur Charakterisierung endlicher p-Gruppen mit tensor-zerlegbaren Charakteren

von
Martin Couson

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
April 2010

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Danksagung

Diese Danksagung soll nicht den Charakter einer Aufzählung haben und ist keineswegs vollständig.

Bezüglich dem Erstellen meiner Diplomarbeit möchte ich Prof. Dr. Gerhard Hiß und Dr. Felix Noeske danken. Insbesondere bin ich beiden wegen vielen konstruktiven Verbesserungsvorschlägen und Ideen zum Dank verpflichtet.

Desweiteren danke ich meiner Familie dafür, dass sie mir den „Rücken freigehalten hat", so dass ich mich vollkommen auf mein Studium konzentrieren konnte.

Vor allem bin ich meiner Freundin Ina für ihre Unterstützung und ihr Verständnis dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Glossar

G'	Kommutatorgruppe
$[x, y]$	$:= x^{-1}y^{-1}xy$
$\Omega_1(G)$	Menge der Elemente der abelschen p-Gruppe G der Ordnung $\leq p$
$<$	echte Untergruppe
$\subset$	echte Teilmenge
$\triangleleft$	echter Normalteiler
$\nu\uparrow_H^G$	die von ν auf G induzierte Klassenfunktion
$\nu\downarrow_H$	die Einschränkung der Abbilung ν auf H
K^n	$:= K^{1\times n}$ für einen Körper K und einer natürlichen Zahl n
Fix_M	Menge der Fixpunkte der Matrix M

Einleitung

In dieser Diplomarbeit beschäftigen wir uns mit der Frage, welche gruppentheoretischen Eigenschaften endliche p-Gruppen mit einem tensor-zerlegbaren Charakter besitzen. Ein irreduzibler Charakter heißt tensor-zerlegbar, falls er das Produkt zweier nichtlinearer, irreduzibler Charaktere ist.

Desweiteren baut die Diplomarbeit auf jener von D. Ritter auf. In dieser hat sie eine Gruppe der Ordnung p^6 für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2,3\}$ mit einem tensor-zerlegbaren Charakter konstruiert. Die Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters wurde dort konstruktiv bewiesen. Zunächst haben wir im Kapitel 2 die Konstruktion von D.Ritter für Gruppen der Ordnung p^n mit $n \geq 6$ und $p \in \mathbb{P}$ geeignet verallgemeinert.

Ausgehend hiervon haben wir uns überlegt, ob man die Beweisidee für die Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters in der konstruierten Gruppe ausnutzen kann, um allgemein für Gruppen der Ordnung p^6 äquivalente, gruppentheoretische Eigenschaften zu finden.

Anschließend haben wir versucht auch für allgemeinere p-Gruppen äquivalente Bedingungen zu finden. Insofern wurde das erste Kapitel chronologisch von hinten nach vorne geschrieben.

Unsere Bemühungen münden schließlich im Satz 1.7. Dabei ist zunächst zu beachten, dass p-Gruppen ebenfalls M-Gruppen sind und somit ein tensor-zerlegbarer Charakter γ einer p-Gruppe die Form

$$\gamma = \varphi{\uparrow}_U^G \cdot \lambda{\uparrow}_V^G$$

hat, wobei φ, λ lineare, irreduzible Charaktere der Untergrupen U bzw. V sind.

Die Hauptaussage dieses Kapitels ist Satz 1.7, der im Wesentlichen den Spezialfall behandelt, in der U und V Normalteiler von G sind und U vom Index p in G ist. In diesem Satz werden gruppentheoretische, äquivalente Aussagen zur Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters angegeben.

Weiter geben wir notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen für die Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters vom Grad p^2 in einer endlichen p-Gruppe an.

In den letzen beiden Kapiteln bestimmen wir alle Gruppen der Ordnung p^6 für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ mit einem tensor-zerlegbaren Charakter. Dafür greifen wir auf die Charakterisierung von p-Gruppen der Ordnung p^6 von Rodney James zurück. In dieser Charakterisierung werden sämtliche Isoklinieklassen und von den Isoklinieklassen alle darin enthaltenen Isomorphieklassen angegeben. Somit stellt sich die Frage, ob für zwei isokline Gruppen G und H genau dann G einen tensor-zerlegbaren Charakter hat, wenn H einen besitzt. Dies ist der Fall. Somit können Ergebnisse des ersten Kapitels angewendet werden.

Im letzten Kapitel werden wir die Charaktertafel von jeweils einem gewählten Vertreter einer Isoklinieklasse mit tensor-zerlegbarem Charakter bestimmen. Da isokline Gruppen sehr ähnliche Charaktertafeln haben, ist es sinnvoll jeweils nur einen Vertreter zu betrachten.

Letzendlich prüfen wir, ob die gefundenen tensor-zerlegbaren Charaktere trivial tensor-zerlegbar (s. Definition 2.6) sind oder nicht.

Kapitel 1

Tensor-zerlegbare Charaktere bei p-Gruppen

Es sei p eine Primzahl.

Im folgenden Kapitel wollen wir uns mit tensor-zerlegbaren Charakteren endlicher p-Gruppen beschäftigen. Ein irreduzibler Charakter heißt tensor-zerlegbar, falls er das Produkt zweier nichtlinearer, irreduzibler Charaktere ist.

Da p-Gruppen ebenfalls M-Gruppen sind, hat ein tensor-zerlegbarer Charakter γ einer p-Gruppe die Form

$$\gamma = \varphi{\uparrow}_U^G \cdot \lambda{\uparrow}_V^G,$$

wobei φ, λ irreduzible Charaktere der Untergrupen U bzw. V sind.

Die Hauptaussage dieses Kapitel ist Satz 1.7, der im Wesentlichen den Spezialfall behandelt, in der U und V Normalteiler von G sind und U vom Index p in G ist. In diesem Satz werden gruppentheoretische, zur Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters äquivalente Aussagen angegeben. Danach betrachten wir weitere Spezialfälle, z.B. wenn G' in $U \cap V$ enthalten ist. Letzendlich geben wir notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen für die Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters vom Grad p^2 in einer endlichen p-Gruppe an.

1.1 Definition:

Ein $\mathbb{C}$-Charakter γ einer Gruppe G heißt tensor-zerlegbar, falls dieser irreduzibel ist und zwei nichtlineare, irreduzible Charaktere α, β existieren mit $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Die Arbeit basiert auf der Diplomarbeit von D. Ritter[1]. Darin hat sie u.a. folgende Resultate erhalten:

- Es sei G eine p-Gruppe der Ordnung $\leq p^5$. Dann existiert kein tensor-zerlegbarer $\mathbb{C}$-Charakter.
- Für alle $p \in \mathbb{P}$ existiert eine Gruppe der Ordnung p^6 mit einem tensor-zerlegbaren $\mathbb{C}$-Charakter.

Außerdem hat sie für Gruppen der Ordnung p^6 mit tensor-zerlegbaren Charakter gruppentheoretische Eigenschaften abgeleitet. Anschließend konstruierte sie eine Gruppe mit u.a. diesen Eigenschaften und bewies, dass diese Gruppe einen tensor-zerlegbaren Charakter besitzt.

Im Folgenden nehmen wir ihre Beweisideen auf, verallgemeinern diese und zeigen eine Äquivalenz zwischen bestimmten gruppentheoretischen und darstellungstheoretischen Eigenschaften.

1.2 Lemma:

Es seien G eine endliche Gruppe und U, V zwei Untergruppen von G. Weiter seien $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\varphi{\uparrow}_U^G \cdot \lambda{\uparrow}_V^G \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$. Dann ist G das Produkt von U und V.

<u>Beweis:</u> Die Behauptung folgt direkt aus dem Tensorproduktsatz von Mackey.

$\square$

Die Idee der folgenden Konstruktion ausgehend von einer p-Gruppe G mit einem tensor-zerlegbaren Charakter, dessen Grad größer als p^2 ist, besteht darin, zu einer Untergruppe G_1 überzugehen, welche einen ähnlichen Charakter von geringerem Grad besitzt:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & U_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & V_1 \ldots \lambda \arrow[dl] \\
\varphi \ldots U_1 \arrow[dr] & & U_2 \cap V_1 =: V_2 \arrow[dl] & \\
 & U_1 \cap V_1 & &
\end{tikzcd}$$

[1] [1]

1.3 Satz:

Es sei G eine endliche p-Gruppe und es seien U_1, V_1 Untergruppen von G mit $[G : U_1] = p^2$, $[G : V_1] = p$ und $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U_1)$, $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V_1)$. Desweiteren sei $\varphi\uparrow_{U_1}^{G} \cdot\lambda\uparrow_{V_1}^{G}$ ein irreduzibler Charakter.

Dann existiert ein Normalteiler U_2 in G mit $U_1 < U_2 < G$ und $\varphi\uparrow_{U_1}^{U_2} \cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U_2)$, wobei $V_2 := U_2 \cap V_1$ ist.

<u>Beweis:</u> Da G eine p-Gruppe ist, existiert ein Normalteiler U_2 mit $U_1 < U_2$ und $[G : U_2] = p$.

Es gilt[2] nun $\varphi\uparrow_{U_1}^{G} \cdot\lambda\uparrow_{V_1}^{G} = (\varphi\cdot\lambda\uparrow_{V_1}^{G}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{G} = (\varphi\cdot\lambda\uparrow_{V_1}^{G}\downarrow_{U_2}\downarrow_{U_1}^{U_2})\uparrow_{U_1}^{G}$.

Nach Lemma 1.2 und den Voraussetzungen ist G das Produkt von U_1 und V_1 und somit gilt ebenfalls $U_2V_1 = G$, woraus wiederum mit dem Satz von Mackey $(\lambda\uparrow_{V_1}^{G})\downarrow_{U_2} = (\lambda\downarrow_{U_2\cap V_1}^{V_1})\uparrow^{U_2}$ folgt. Damit ist

$$(\varphi\cdot\lambda\uparrow_{V_1}^{G}\downarrow_{U_2}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{G} = (\varphi\cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{G} = ((\varphi\cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{U_2})\uparrow_{U_2}^{G}$$

und $(\varphi\cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{U_2}$ ist irreduzibel. Nun gilt aber wiederum[3] $(\varphi\cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}\downarrow_{U_1})\uparrow_{U_1}^{U_2} = \varphi\uparrow_{U_1}^{U_2} \cdot\lambda\downarrow_{V_2}^{V_1}\uparrow^{U_2}$ und es folgt die Behauptung. □

Das nächstfolgende Lemma gibt eine Charakterisierung der Elemente der Trägheitsgruppe eines linearen Charakters eines Normalteilers an. Dies ist insofern interessant, als für eine endliche Gruppe H mit Normalteiler Q und linearen Charakter $\mu \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(Q)$ die Aussage $\mu\uparrow_{Q}^{H}\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$ äquivalent ist zu $T_G(\mu) = Q$.

1.4 Lemma:

Es sei H eine endliche Gruppe mit Normalteiler Q und linearen Charakter $\mu \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(Q)$. Weiter sei h ein Element von H.

Genau dann ist $h \in T_H(\mu)$, wenn $[h, Q] \subseteq \ker(\mu)$ ist.

<u>Beweis:</u> Das Element $h \in H$ liegt in $T_H(\mu)$ genau dann, wenn $h^{-1} \in T_H(\mu)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mu(h^{-1}qh) = \mu(q)$ für alle $q \in Q$ ist. Dies ist offensichtlich gleichbedeutend mit $\mu(h^{-1}qhq^{-1}) = \mu(1)$ für alle $q \in Q$, woraus die Behauptung folgt. □

---

[2] [3], s. problem (5.3)

[3] [3], s. problem (5.3)

Wie schon das vorherige Lemma andeutet, werden die Eigenschaften von Elementen von Kommutatorgruppen zur Bestimmung von Trägheitsgruppen eine entscheidende Rolle spielen. U.a. gibt das nächste Lemma Eigenschaften dieser Elemente wieder.

1.5 Lemma:

Es sei H eine endliche Gruppe.

(i) Für $k_1, k_2, h_1, h_2 \in H$ gilt

$$[h_1h_2, k_1] = [h_1, k_1]^{h_2}[h_2, k_1]$$

sowie

$$[h_1, k_1k_2] = [h_1, k_2][h_1, k_1]^{k_2}.$$

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_n$ Erzeuger der Gruppe H. Dann ist $H' = \langle [h_i, h_j]^h \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, h \in H \rangle$.

(iii) Es sei $k \in H$ mit $[H, k] \subseteq Z(H)$. Dann sind die Abbildungen

$$\nu_1 : H \to [H, k], h \mapsto [h, k]$$

sowie

$$\nu_2 : H \to [k, H], h \mapsto [k, h]$$

Homomorphismen.

(iv) Es seien $U, V \lhd H$ mit $U' \cap V' = \{1\}$ und $U' \subseteq U \cap V$. Weiter seien $h \in U \cap V$, $u \in U$ und $v \in V$. Dann gilt $[uv, h] = [u, h][v, h]$.

Beweis: zu (i): Man hat

$$\begin{aligned} [h_1h_2, k_1] &= h_2^{-1}h_1^{-1}k_1^{-1}h_1h_2k_1 = h_2^{-1}h_1^{-1}k_1^{-1}h_1k_1h_2h_2^{-1}k_1^{-1}h_2k_1 \\ &= [h_1, k_1]^{h_2}[h_2, k_1]. \end{aligned}$$

Desweiteren hat man allgemein für $h, h' \in H$

$$[h, h']^{-1} = (h^{-1}h'^{-1}hh')^{-1} = h'^{-1}h^{-1}h'h = [h', h]. \tag{1.0.1}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} [h_1, k_1k_2] &\overset{\text{Gl. 1.0.1}}{=} [k_1k_2, h_1]^{-1} \overset{\text{s.o.}}{=} ([k_1, h_1]^{k_2}[k_2, h_1])^{-1} \\ &\overset{\text{Gl. 1.0.1}}{=} [h_1, k_2][h_1, k_1]^{k_2}. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung.

zu (ii): Da H' ein Normalteiler von H und $[h_i, h_j] \in H'$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist, gilt $\langle [h_i, h_j]^h \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, h \in H\rangle \subseteq H'$. Nach Definition gilt $H' = \langle [h, h'] \mid h, h' \in H\rangle$. Mit (i) und der Tatsache, dass $h_1, \ldots, h_n$ Erzeuger von H sind und $[h_i, h_i] = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist, folgt somit $H' \subseteq \langle [h_i, h_j]^h \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, h \in H\rangle$ und letzendlich die Gleichheit.

zu (iii): Für $h_1, h_2 \in H$ hat man $\nu_2(h_1 h_2) = [k, h_1 h_2] \overset{(i)}{=} [k, h_2][k, h_1]^{h_2} \overset{[H,k]\subseteq Z(H)}{=} [k, h_2] \underbrace{[k, h_1]}_{\in Z(H)} = [k, h_1][k, h_2] = \nu_2(h_1)\nu_2(h_2)$. Man beachte hierbei, dass $[H, k] = [k, H]$ nach Gleichung 1.0.1 gilt. Analog folgt mit (i), dass ν_1 ein Homomorphismus ist.

zu (iv): Die Kommutatorgruppe U' ist als charakteristische Untergruppe des Normalteilers U ebenfalls normal in G und somit gilt $[U', V] \subseteq U'$. Da U' in $U \cap V$ enthalten ist, gilt weiter $[U', V] \subseteq [U \cap V, V] \subseteq [V, V] = V'$. Zusammenfassend folgt also $[U', V] \subseteq U' \cap V' = \{1\}$. Somit ist

$$[uv, h] \overset{(i)}{=} (\underbrace{[u, h]}_{\in U'})^v [v, h] \overset{[U',V]=\{1\}}{=} [u, h][v, h].$$

Es folgt die Behauptung. $\square$

1.6 Bezeichnungen:

Es sei G eine endliche p-Gruppe. Desweiteren seien V ein Normalteiler von G vom Index p und U ein beliebiger, von G verschiedener Normalteiler von G.

Nun betrachten wir einen Spezialfall von Tensorzerlegbarkeit. Der nächste Satz ist auch der wichtigste dieser Arbeit.

1.7 Satz:

Es gelten die Bezeichnungen 1.6.

Es existieren genau dann lineare Charaktere $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\ker(\varphi\!\uparrow_U^G) \cap \ker(\lambda\!\uparrow_V^G) = \{1\}$, so dass das Produkt der induzierten Charaktere $\varphi\!\uparrow_U^G \cdot \lambda\!\uparrow_V^G$ ein irreduzibler Charakter von G ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $UV = G$;

(ii) $U' \cap V' = \{1\}$;

(iii) $Z(G)$ ist ein direktes Produkt zweier nichttrivialer, zyklischer Untergruppen;

(iv) $Z(G) \subseteq U \cap V$;

(v) es existiert ein $W \leq U \cap V$ mit $U'W \cap V'W = W$ und W ist maximal bzgl. der Eigenschaft $Z(G) \cap W = \{1\}$. Weiter gilt $[g, U \cap V] \nsubseteq W$ für alle $g \in G \setminus U \cap V$;

(vi) es gilt entweder

  (a) $U' \nsubseteq Z(G)$ oder

  (b) $U' \subseteq Z(G)$ und $[v, Z(U)] \nsubseteq W$ für alle $v \in V \setminus U \cap V$.

Beweis: „$\Rightarrow$"[4] zu (i): Die Behauptung folgt direkt aus den Voraussetzungen und Lemma 1.2.

zu (ii): Da sowohl U als auch V Normalteiler von G und Kommutatorgruppen charakteristisch sind, gilt ebenfalls $U', V' \lhd G$. Wegen $U' \subseteq \ker(\varphi)$ hat man somit $U'^{g^{-1}} = U' \subseteq \ker(\varphi)$ bzw. $U' \subseteq \ker(\varphi)^g$ für alle $g \in G$. Analog gilt $V' \subseteq \ker(\lambda)^g$ für alle $g \in G$ und somit $U' \cap V' \subseteq \bigcap_{g \in G} \ker(\varphi)^g \cap \bigcap_{g' \in G} \ker(\lambda)^{g'} = \ker(\varphi\uparrow_U^G) \cap \ker(\lambda\uparrow_V^G) = \{1\}$.

Für spätere Zwecke benötigen wir die folgenden Aussagen, welche aus den oben Genannten folgen. Es gilt

$$(U \cap V)' \subseteq U' \cap V' = \{1\} \tag{1.0.2}$$

und somit ist die Gruppe $U \cap V$ abelsch. Mit einem analogen Argument folgt

$$(Z(G) \cap \ker(\varphi)) \cap (Z(G) \cap \ker(\lambda)) = \{1\}. \tag{1.0.3}$$

zu (iv):

Nach dem Satz von Mackey gilt

$$(\varphi \cdot \lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U)\uparrow_U^G = (\varphi \cdot \lambda\uparrow_V^G\downarrow_U)\uparrow_U^G = \varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G = (\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot \lambda)\uparrow_V^G = (\varphi\downarrow_{U\cap V}^U\uparrow^V \cdot \lambda)\uparrow_V^G . \tag{1.0.4}$$

[4] [1], vgl. Thm. 3.2.4

Insbesondere sind die Charaktere $\lambda\downarrow^V_{U\cap V}\uparrow^U$, $\varphi\downarrow^U_{U\cap V}\uparrow^V$ irreduzibel und somit ebenfalls $\lambda\downarrow^V_{U\cap V}$ und $\varphi\downarrow^U_{U\cap V}$. Wegen $U\cap V \triangleleft V$, $U\cap V\triangleleft U$ und der Irreduzibilität der Charaktere sind $T_V(\varphi\downarrow^U_{U\cap V}) = U\cap V$ und $T_U(\lambda\downarrow^V_{U\cap V}) = U\cap V$. Daraus folgt zunächst, dass U und V nicht abelsch sein können, also gilt insbesondere

$$U', V' \neq \{1\}. \tag{1.0.5}$$

Es sei nun $z \in Z(G)$. Wegen $G = UV$ existieren $u \in U$ und $v \in V$ mit $z = uv$. Da $v \in T_G(\lambda\downarrow^V_{U\cap V})$ ist, gilt $u \in T_G(\lambda\downarrow^V_{U\cap V})$ und insbesondere $u \in T_U(\lambda\downarrow^V_{U\cap V}) = U\cap V$. Also ist $z = uv \in V$. Analog zeigt man, dass $z \in U$ und somit $z \in U\cap V$ ist. Es folgt die Behauptung.

<u>zu (iii)</u>: Das Zentrum von G ist abelsch und endlich. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$, der Rang der p-Gruppe $Z(G)$, mit $\Omega_1(Z(G)) \cong C_p \times \ldots \times C_p \cong \mathbb{F}_p^k$. Nach (iv) ist das Zentrum von G eine Untergruppe von $U\cap V$. Somit können $\lambda\downarrow^V_{\Omega_1(Z(G))}\colon \Omega_1(Z(G)) \to \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^p = 1\} \cong C_p \cong \mathbb{F}_p$ und $\varphi\downarrow^U_{\Omega_1(Z(G))}$ als $\mathbb{F}_p$-Vektorraumhomomorphismen aufgefasst werden. Nach Gleichung 1.0.5 sind die Normalteiler $U', V' \neq \{1\}$ und somit sind $\{1\} \neq Z(G)\cap U' \subseteq Z(G)\cap\ker(\varphi)$ und $\{1\} \neq Z(G)\cap V' \subseteq Z(G)\cap\ker(\lambda)$. Wegen $(Z(G)\cap\ker(\varphi))\cap\ker(\lambda) \overset{1.0.3}{=} \{1\}$ gilt somit nun $\ker(\lambda\downarrow^V_{\Omega_1(Z(G))}) \neq \Omega_1(Z(G))$. Analog ist $\ker(\varphi\downarrow^U_{\Omega_1(Z(G))}) \neq \Omega_1(Z(G))$. Damit sind $\lambda\downarrow^V_{\Omega_1(Z(G))}$, $\varphi\downarrow^U_{\Omega_1(Z(G))} \neq 0$. Somit sind $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker(\lambda\downarrow)) = k-1$ sowie $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker(\varphi\downarrow)) = k-1$. Folglich hat man $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker(\lambda\downarrow)\cap\ker(\varphi\downarrow)) \geq k-2$. Wegen $Z(G)\cap\ker(\lambda\downarrow)\cap\ker(\varphi\downarrow) = \{1\}$ nach Gleichung 1.0.3 hat man wiederum $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker(\lambda\downarrow)\cap\ker(\varphi\downarrow)) = 0$ und somit ist $k = 2$. Es folgt die Behauptung.

<u>zu (v)</u>: Es sei $W := \ker(\varphi)\cap\ker(\lambda)$. Da $\ker(\varphi)\cap\ker(\lambda)$ eine Untergruppe von $U\cap V$ ist, gilt $W = \ker(\varphi)\cap\ker(\lambda) = \ker(\varphi\downarrow^U_{U\cap V})\cap\ker(\lambda\downarrow^V_{U\cap V})$. Desweiteren ist $W \subseteq \underbrace{U'}_{\subseteq\ker(\varphi)} W \cap \underbrace{V'}_{\subseteq\ker(\lambda)} W \subseteq \ker(\varphi)\cap\ker(\lambda) = W$ und wegen 1.0.3 gilt $Z(G)\cap W = \{1\}$.

Wir zeigen nun, dass W eine maximale Untergruppe von $U\cap V$ bzgl. der Eigenschaft $Z(G)\cap W = \{1\}$ ist. Zunächst ist $\mathrm{Bild}(\lambda\downarrow^V_{U\cap V})$ eine endliche Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ und dementsprechend zyklisch. Also ist $(U\cap V)/\ker(\lambda\downarrow^V_{U\cap V})$ zyklisch. Analog zeigt man, dass $(U\cap V)/\ker(\varphi\downarrow^U_{U\cap V})$ zyklisch ist.

Desweiteren ist $\ker(\varphi\downarrow)/(\ker(\varphi\downarrow)\cap\ker(\lambda\downarrow)) \cong (\ker(\varphi\downarrow)\ker(\lambda\downarrow))/\ker(\lambda\downarrow) \leq (U\cap V)/\ker(\lambda\downarrow)$ zyklisch. Es sei $H := (U\cap V)/W = (U\cap V)/(\ker(\varphi)\cap\ker(\lambda))$ und $\phi(H)$ sei die Frattinigruppe von H. Man beachte hierbei, dass H nichttrivial ist, da $Z(G)\cap W = \{1\}$ und der Schnitt vom Normalteiler $U\cap V$ mit $Z(G)$

nichttrivial ist. Zunächst gilt, dass $H/\phi(H)$ eine elementar-abelsche p-Gruppe ist. Da $N_1 := \ker(\varphi\downarrow^U_{U\cap V})/W$ zyklisch ist, gilt entweder $(N_1\phi(H))/\phi(H) \cong \{1\}$ oder $(N_1\phi(H))/\phi(H) \cong C_p$. Analog ist $H/(\phi(H)N_1)$ isomorph zu $\{1\}$ oder zu C_p, da $H/N_1 \cong (U\cap V)/\ker(\varphi\downarrow)$ zyklisch ist. Zusammenfassend ist $H/\phi(H)$ also elementar abelsch vom Rang ≤ 2. Wir zeigen nun, dass $H/\phi(H)$ Rang 2 hat, indem wir zeigen, dass die Gruppe nicht Rang 1 hat.

Nach Ungleichung 1.0.5 und der Gleichung 1.0.3 sind $\{1\} \neq U' \cap Z(G) \overset{Z(G)\subseteq U\cap V}{\subseteq} \ker(\varphi\downarrow^U_{U\cap V}) \setminus \ker(\lambda)$ sowie $\{1\} \neq V' \cap Z(G) \subseteq \ker(\lambda\downarrow^V_{U\cap V}) \setminus \ker(\varphi)$.

Somit ist $(U'\cap Z(G))W/W \neq 1$ und analog $(V'\cap Z(G))W/W \neq 1$. Desweiteren gilt wegen $W \subseteq \ker(\varphi), \ker(\lambda)$, dass

$$\begin{aligned}(U'\cap Z(G))W/W \cap (V'\cap Z(G))W/W &\subseteq \ker(\varphi\downarrow_{U\cap V})W/W \cap \ker(\lambda\downarrow_{U\cap V})W/W \\ &= (\ker(\varphi)\cap\ker(\lambda))/W = 1\end{aligned}$$

ist. Falls nun $H/\phi(H)$ Rang 1 hätte, dann wäre H zyklisch[5] und damit $\Omega_1(H) \cong C_p$. Dementsprechend wäre $\Omega_1(H) = \Omega_1((U'\cap Z(G))W/W) = \Omega_1((V'\cap Z(G))W/W)$, was wiederum $(U'\cap Z(G))W/W \cap (V'\cap Z(G))W/W = 1$ widerspräche. Folglich ist der Rang von $H/\phi(H) = 2$ und damit auch der Rang von $\Omega_1(H)$, da H abelsch ist[6]. Es folgt $\Omega_1(H) = \Omega_1(Z(G))W/W$ mit (iii).

Es sei nun $\tilde{W}$ eine beliebige Obermenge von W in $U\cap V$ mit $Z(G)\cap\tilde{W} = \{1\}$ Nun betrachten wir $H_1 := \tilde{W}/W \leq H$. Falls H_1 nichttrivial ist, existiert ein $\tilde{w} \in \tilde{W}$ mit $1W \neq \tilde{w}W \in \Omega_1(H_1) \leq \Omega_1(H) = \Omega_1(Z(G))W/W$. Weiter existieren $1 \neq z \in \Omega_1(Z(G)) \subseteq Z(G)$, $w \in W \subseteq \tilde{W}$ mit $\tilde{w} = zw$ und folglich ist $z \in Z(G)\cap\tilde{W}$. Dies widerspricht aber $\tilde{W}\cap Z(G) = \{1\}$. Somit sind $H_1 = 1$ und $\tilde{W} = W$. Also ist W maximal bezüglich den Eigenschaften $W\cap Z(G) = \{1\}$ und $W \leq U\cap V$.

Wir benötigen nun die

Hilfsbehauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $[g, U\cap V] \nsubseteq W$ für alle $g \in G\setminus(U\cap V)$,

(ii) $[u, U\cap V] \nsubseteq W$ für alle $u \in U\setminus(U\cap V)$ und $[v, U\cap V] \nsubseteq W$ für alle $v \in V\setminus(U\cap V)$.

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" Klar.

[5] [5], s. Satz III 3.15

[6] [5], s. Satz V 6.4

„$\Leftarrow$" Es sei $g \in G$ mit $[g, U \cap V] \subseteq W$. Dann lässt sich wegen $G = UV$ das Element g schreiben als $g = uv$ mit $u \in U$ und $v \in V$. Es sei $h \in U \cap V$. Wegen

$$[U : U \cap V] = [UV : V] = [G : V] = p \tag{1.0.6}$$

ist die Kommutatorgruppe von U eine Untergruppe von $U \cap V$. Mit Lemma 1.5 (iv) gilt somit $[uv, h] = [u, h][v, h]$.

Wegen $[g, U \cap V] \subseteq W$ gilt $[u, h]W = [v, h]^{-1}W \in U'W \cap V'W = W$ für alle $h \in U \cap V$. Somit gilt $[u, U \cap V] \subseteq W$ und $[v, U \cap V] \subseteq W$. Nach Voraussetzung folgt nun $u \in U \cap V$ und $v \in U \cap V$. Also ist $g = uv \in U \cap V$ und es folgt die Hilfsbehauptung.

Es sei nun $u \in U$ mit $[u, U \cap V] \subseteq W = \ker(\lambda) \cap \ker(\varphi) \subseteq \ker(\lambda)$. Nach Lemma 1.4 ist dies äquivalent zu $u \in T_U(\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}) \overset{\text{Gl. 1.0.4}}{=} U \cap V$. Also ist $u \in U \cap V$. Analog zeigt man, dass alle $v \in V$ mit $[v, U \cap V] \subseteq W$ Elemente von $U \cap V$ sind. Mit der Hilfsbehauptung folgt somit die Behauptung.

<u>zu (vi):</u> Wegen $\varphi\uparrow^G_U \cdot\lambda\uparrow^G_V = (\varphi \cdot \lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V})\uparrow^G_U$ nach 1.0.4 ist $\varphi\uparrow^G_U \cdot\lambda\uparrow^G_V$ genau dann ein irreduzibler Charakter von G, wenn $T_G(\varphi \cdot \lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V}) = U$ ist. Da $\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V} = \lambda{\uparrow}^G_V{\downarrow}_U$ nach 1.0.4 ist und demnach $T_G(\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V}) = G$ gilt, sind bei der Bestimmung der Trägheitsgruppe in G von $\varphi \cdot \lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V}$ jene Elemente von $u \in U$ entscheidend mit $\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V}(u) \neq 0$.

Es sei nun $U' \subseteq Z(G)$.

Die in der folgenden Hilfsbehauptung aufgeführten Voraussetzungen haben wir schon gezeigt, sie werden nur aufgelistet, damit die Hilfsbehauptung für die Rückrichtung des Beweises des Satzes verwendet werden kann.

Hilfsbehauptung: <u>Voraussetzungen:</u> Es gelten die Bedingungen (i) ($G = UV$, d.h. die Gleichung $(\varphi \cdot \lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U)\uparrow^G_U = (\varphi \cdot \lambda{\uparrow}^G_V{\downarrow}_U)\uparrow^G_U = \varphi\uparrow^G_U \cdot\lambda\uparrow^G_V = (\varphi{\uparrow}^G_U{\downarrow}_V \cdot\lambda)\uparrow^G_V = (\varphi{\downarrow}^U_{U\cap V}{\uparrow}^V \cdot\lambda)\uparrow^G_V$ gilt), (ii) und (iii). Desweiteren sei $\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U$ irreduzibel und es seien $U', V' \neq \{1\}$ sowie $(U \cap V)' = \{1\}$.

Es sei zudem U' eine Untergruppe von $Z(G)$.

Dann ist $\lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U$ vom zentralen Typ, d.h.

$$\lambda{\uparrow}^G_V{\downarrow}_U(u) = \lambda{\downarrow}^V_{U\cap V}{\uparrow}^U_{U\cap V}(u) = \begin{cases} 0, & u \notin Z(U) \\ [U : U \cap V]\lambda(u), & u \in Z(U) \end{cases}$$

für $u \in U$, und es gilt:

$$T_G(\varphi \cdot \lambda{\uparrow}^V_{U\cap V}{\downarrow}_U) = U \Longleftrightarrow [v, Z(U)] \not\subseteq \ker(\varphi) \cap \ker(\lambda) = W$$

für alle $v \in V \setminus U \cap V$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $Z(U)$ eine Untergruppe von $U \cap V$ und vom Index p^2 in U ist.

Dazu betrachten wir die Abbildung $\eta : U \cap V \to U \cap V$, $\tilde{u} \mapsto [\tilde{u}, u]$, wobei $u \in U \setminus U \cap V$ beliebig aber fest gewählt ist. Wegen $[U : U \cap V] = p$ nach 1.0.6 hat man $\langle u \rangle (U \cap V) = U$. Desweiteren ist $[U, u] \subseteq U' \subseteq Z(G)$ und somit ist nach Lemma 1.5 (iii) die Abbildung η ein Gruppenhomorphismus. Es sei $\tilde{u} \in U \cap V$. Dann erhält man wiederum mit Lemma 1.5

$$[\tilde{u}, u]^p = [\tilde{u}, \underbrace{u^p}_{\in U \cap V}] \overset{(U\cap V)' = \{1\}}{=} 1. \tag{1.0.7}$$

Nach Voraussetzung sind $V', U' \neq \{1\}$. Mit (ii) folgt somit $Z(G) \cap U', Z(G) \cap V' \neq \{1\}$ und $(Z(G) \cap U') \cap (Z(G) \cap V') = \{1\}$. Wegen (iii) sind demnach $Z(G) \cap U'$ und $Z(G) \cap V'$ zyklisch. Wegen $U' \subseteq Z(G)$ ist also U' zyklisch. Mit Gleichung 1.0.7 folgt $\mathrm{Bild}(\eta) \cong C_p$, wenn man noch beachtet, dass $U' \neq \{1\}$, $(U \cap V)' = \{1\}$ und $[U : U \cap V] = p$ sind. Also ist $[U \cap V : \ker(\eta)] = p$.

Weiter gilt

$$Z(U) \subseteq U \cap V, \tag{1.0.8}$$

denn $U \cap V$ ist abelsch und $[U : U \cap V] = p$. Falls nun das Zentrum von U nicht in $U \cap V$ enthalten ist, existiert ein Element $u^* \in Z(U) \setminus (U \cap V)$ mit $\langle u^* \rangle (U \cap V) = U$. Das heißt aber insbesondere, dass $Z(U) = U$ ist. Dies widerspricht allerdings $U' \neq \{1\}$.

Da die Gruppe $U \cap V$ abelsch, $Z(U) \subseteq U \cap V$ und $U = \langle u \rangle (U \cap V)$ ist, gilt $\ker(\eta) = Z(U)$. Also ist $[U : Z(U)] = [U : U \cap V] \cdot [U \cap V : Z(U)] = p^2$. Desweiteren ist $\lambda \downarrow^V_{U\cap V} \uparrow^U \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \downarrow^V_{U\cap V} \uparrow^U \downarrow_{Z(U)} = [U : U \cap V] \underbrace{\lambda \downarrow_{Z(U)}}_{\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(Z(U))} = p \cdot \lambda \downarrow_{Z(U)}$ und folglich[7] ist $\lambda \downarrow^V_{U\cap V} \uparrow^U$ vom zentralen Typ.

Wir betrachten die Elemente der Trägheitsgruppe von $\varphi \cdot \lambda \uparrow^G_V \downarrow_U$. Es sei $g \in G$. Genau dann ist $g \in T_G(\varphi \cdot \lambda \uparrow^G_V \downarrow_U)$, wenn das Inverse in der Trägheitsgruppe liegt. Dies ist äquivalent zu $(\varphi \cdot \lambda \uparrow\downarrow)^{g^{-1}} = \varphi \cdot \lambda \uparrow\downarrow$. Da $T_G(\lambda \uparrow\downarrow) = G$ und $\lambda \uparrow\downarrow$ vom zentralen Typ ist, ist dies wiederum äquivalent zu $\varphi(g^{-1} u g) = \varphi(u)$ für alle $u \in Z(U)$. Aufgrund der Linearität von φ ist dies genau dann der Fall, wenn $[g, Z(U)] \subseteq \ker(\varphi)$ ist.

[7] [3], Problem (6.3)

Es sei nun g ein beliebiges Element in G. Man kann g schreiben als $g = uv$ mit $u \in U$ und $v \in V$. Für $z \in Z(U)$ gilt weiter

$$[g, z] = [uv, z] = v^{-1}u^{-1}z^{-1}uvz = v^{-1}z^{-1}vz = [v, z]$$

und somit ist $[g, Z(U)] = [v, Z(U)]$. Wegen $Z(U) \subseteq U \cap V$ nach 1.0.8 ist $[v, Z(U)] \subseteq V' \subseteq \ker(\lambda)$. Für ein beliebiges $v' \in V$ ist $[v', Z(U)] \subseteq \ker(\varphi)$ also äquivalent zu $[v', Z(U)] \subseteq \ker(\varphi) \cap \ker(\lambda) = W$.

Zusammenfassend ist genau dann $T_G(\varphi \cdot \lambda \upharpoonleft\!\downharpoonright) = U$, wenn $[g, Z(U)] \nsubseteq \ker(\varphi)$ für alle $g \in G \setminus U$ ist, was wiederum äquivalent zu $[v, Z(U)] \nsubseteq W$ für alle $v \in V \setminus U \cap V$ ist.

Es folgt die Hilfsbehauptung und damit auch die Behauptung.

„$\Leftarrow$"[8] Aufgrund von Voraussetzung (v) existiert ein $W \leq U \cap V$ mit $[g, U \cap V] \nsubseteq W$ für alle $g \in G \setminus U \cap V$. Damit sind U und V nicht abelsch, also gilt $U' \cap Z(G) \neq \{1\}$ und $V' \cap Z(G) \neq \{1\}$. Nach (ii) und (iii) sind $U' \cap V' = \{1\}$ und $Z(G)$ das direkte Produkt zweier nichttrivialer zyklischer Untergruppen; also sind $U' \cap Z(G)$ und $V' \cap Z(G)$ zyklisch mit trivialem Schnitt. Es seien nun $z_1 \in Z(G) \cap V'$ und $z_2 \in Z(G) \cap U'$, so dass $\langle z_1 \rangle = \Omega_1(Z(G) \cap V')$ und $\langle z_2 \rangle = \Omega_1(Z(G) \cap U')$ sind. Weiter ist

$$(V' \cap Z(G)) \cap U'W \subseteq V' \cap U'W \cap Z(G) \subseteq V'W \cap U'W \cap Z(G) \overset{(v)}{\subseteq} W \cap Z(G) \overset{(v)}{=} \{1\}.$$

Damit folgt wegen $Z(G) \subseteq U \cap V$ nach Voraussetzung (iv), dass $|\underbrace{z_1(U'W)}_{\in U/(U'W)}| = p$ ist.

Da $U/(U'W)$ abelsch ist, existiert somit ein Homomorphismus[9] $\varphi : U/(U'W) \to \mathbb{C}^*$ mit $\varphi(z_1(U'W)) \neq 1$. Wir fassen φ als inflationierten Charakter $\varphi : U \to \mathbb{C}^*$ mit $U'W \subseteq \ker(\varphi)$ auf.

Analog existiert ein Homomorphismus $\lambda : V \to \mathbb{C}^*$ mit $V'W \subseteq \ker(\lambda)$ und $\lambda(z_2) \neq 1$.

Nun gilt nach Konstruktion $W \leq \ker(\varphi) \cap \ker(\lambda)$. Wegen $\Omega_1(Z(G)) = \langle z_1, z_2 \rangle \cong C_p \times C_p$ und $\ker(\varphi) \cap \Omega_1(Z(G)) = \langle z_2 \rangle$ sowie $\ker(\lambda) \cap \Omega_1(Z(G)) = \langle z_1 \rangle$ hat man $\ker(\varphi) \cap \ker(\lambda) \cap \Omega_1(Z(G)) = \{1\}$. Somit ist $\ker(\varphi) \cap \ker(\lambda) \cap Z(G) = \{1\}$. Damit folgt wegen $W \leq \ker(\varphi) \cap \ker(\lambda)$ und der Maximalitätseigenschaft von W bezüglich $W \cap Z(G) = \{1\}$ die Gleichheit $W = \ker(\lambda) \cap \ker(\varphi)$. Weiter ist

$$\ker(\lambda{\uparrow}_V^G) \cap \ker(\varphi{\uparrow}_U^G) \cap Z(G) \subseteq \ker(\lambda) \cap \ker(\varphi) \cap Z(G) = W \cap Z(G) = \{1\}.$$

[8] [1], vgl. Beweis von Thm. 3.3.1

[9] [3], (5.5) Corollary

Da $\ker(\lambda\uparrow_V^G) \cap \ker(\varphi\uparrow_U^G)$ ein Normalteiler von G ist, erhält man die Aussage, dass der Schnitt $\ker(\lambda\uparrow_V^G) \cap \ker(\varphi\uparrow_U^G)$ trivial ist.

Nun muss noch gezeigt werden, dass $\varphi\uparrow_U^G \cdot\lambda\uparrow_V^G$ ein irreduzibler Charakter ist. Damit wären die Charaktere $\varphi\uparrow_U^G$ und $\lambda\uparrow_V^G$ ebenfalls irreduzibel.

Wegen $G = UV$ gilt nun

$$(\varphi \cdot \lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U)\uparrow_U^G = (\varphi \cdot \lambda\uparrow_V^G\downarrow_U)\uparrow_U^G = \varphi\uparrow_U^G \cdot\lambda\uparrow_V^G = (\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda)\uparrow_V^G = (\varphi\downarrow_{U\cap V}^U\uparrow^V \cdot\lambda)\uparrow_V^G \tag{1.0.9}$$

analog wie in 1.0.4. Wir bestimmen zunächst die Trägheitsgruppen von $\lambda\downarrow_{U\cap V}^V$ (bzgl. U) und φ (bzgl. G).

Nach Voraussetzung (v) gilt $[g, U \cap V] \not\subseteq W = \ker(\varphi) \cap \ker(\lambda)$ für alle $g \in G \setminus (U \cap V)$ und somit ist $[u, U \cap V] \not\subseteq \ker(\lambda)$ für alle $u \in U \setminus U \cap V$ und ebenfalls $[v, U \cap V] \not\subseteq \ker(\varphi)$ für alle $v \in V \setminus U \cap V$. Dementsprechend hat man nach Lemma 1.4: $T_U(\lambda\downarrow_{U\cap V}^V) = U \cap V$ sowie $V \cap T_G(\varphi\downarrow_{U\cap V}^U) = T_V(\varphi\downarrow_{U\cap V}^U)$ und folglich $V \cap U \subseteq V \cap T_G(\varphi) \subseteq V \cap T_G(\varphi\downarrow_{U\cap V}^U) = U \cap V$. Da die Trägheitsgruppe eine Gruppe und $U \subseteq T_G(\varphi)$ ist und wegen der Gleichung $G = UV$ erhält man somit auch $T_G(\varphi) = U$. Damit folgt zunächst, dass $\varphi\uparrow_U^G$ und $\lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U$ irreduzibel sind, und da φ ein linearer Charakter ist, folgt ebenfalls, dass $\varphi\cdot\lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U$ ein irreduzibler Charakter ist. Analog sind nun auch $\varphi\downarrow_{U\cap V}^U\uparrow^V \cdot\lambda$ sowie $\lambda\uparrow_V^G$ irreduzibel.

Nun bestimmen wir die Trägheitsgruppe von $\varphi\downarrow_{U\cap V}^U\uparrow^V \cdot\lambda$ bzw. $\varphi\cdot\lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U$ bezüglich G.

1. Fall: $U' \not\subseteq Z(G)$. Wir betrachten nun die absteigende Zentralreihe von U, d.h.

$$U = U_1 \trianglerighteq U_2 \trianglerighteq U_3 \trianglerighteq \dots$$

mit $U_1 := U$ und $U_{n+1} = [U, U_n]$. Da U eine p-Gruppe ist, und jede p-Gruppe nilpotent ist, existiert ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $U_m = \{1\}$. Die Zahl $m - 1$ wird auch als Nilpotenzklasse von U bezeichnet. Es gilt zunächst $U_{m-1} \neq \{1\}$ und $U_{m-1} \subseteq Z(U)$. Wir zeigen nun, dass $m \geq 4$ ist, was gleichbedeutend ist mit $U' \not\subseteq Z(U)$. Wegen $U' \subseteq U \cap V$ ist $[V, U'] \subseteq U' \cap V' = \{1\}$ und folglich ist $U' \subseteq Z(V)$. Angenommen U' ist in $Z(U)$ enthalten, dann ist $U' \subseteq Z(U) \cap Z(V) \subseteq Z(G)$. Dies widerspricht allerdings der Voraussetzung. Also ist $m \geq 4$. Dementsprechend existiert ein $w \in U_{m-2} \subseteq U_{4-2} = U'$ und ein $u \in U$ mit $[u^{-1}, w^{-1}] = uwu^{-1}w^{-1} \in U_{m-1} \setminus \{1\} \subseteq (U' \cap Z(U)) \setminus \{1\} \subseteq (U' \cap Z(G)) \setminus \{1\}$.

Wegen $\ker(\lambda) \cap U' \cap Z(G) \subseteq \ker(\lambda) \cap \ker(\varphi) \cap Z(G) = \{1\}$ hat man $\lambda([u^{-1}, w^{-1}]) \neq 1$ und folglich ist $\lambda^u(w) \neq \lambda(w)$ gemäß Lemma 1.4. Wegen $w \in U' \subseteq Z(V)$ und

$\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ gilt für alle $v \in V$ und für alle $\tilde{u} \in U$:

$$\varphi^{\tilde{u}v}(w) = \varphi^{\tilde{u}}(w^{v^{-1}}) = \varphi^{\tilde{u}}(w) = \varphi(w).$$

Es folgt $\varphi\uparrow_U^G(w) = [G : U]\varphi(w) \neq 0$. Zusammenfassend ist also

$$(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda)^u(w) = \varphi\uparrow_U^G\downarrow_V(w) \cdot \lambda^u(w) \neq \varphi\uparrow_U^G\downarrow_V(w) \cdot \lambda(w),$$

d.h. $u \notin T_G(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda)$ (beachte $w \in U' \subseteq U \cap V$). Wegen $T_G(\lambda) = V$ und $T_G(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V) = G$ ist $V \subseteq T_G(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda)$. Weil $T_G(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda) \neq G$ und V maximal ist, hat man somit $T_G(\varphi\uparrow_U^G\downarrow_V \cdot\lambda) = V$ und es folgt die Behauptung.

2. Fall: $U' \subseteq Z(G)$ und $[v, Z(U)] \nsubseteq W$ für alle $v \in V \setminus U \cap V$.

Wegen $U', V' \neq \{1\}$, $(U \cap V)' = \{1\}$ und $\lambda\downarrow_{U\cap V}^V\uparrow^U \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ folgt mit der zweiten Hilfsbehauptung von der Beweisrichtung „$\Rightarrow$” die Behauptung. □

Jetzt wollen wir den Fall betrachten, in dem die Kommutatorgruppe eine Untergruppe von $U \cap V$ ist. Dazu benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

1.8 Lemma:

Es sei H eine endliche, abelsche p-Gruppe. Desweiteren sei h ein beliebiges Element von H der Ordnung p. Dann existiert eine zyklische Untergruppe N_1 von H mit $h \in N_1$, so dass ein Komplement $N_2 \leq H$ mit $H = N_1 \times N_2$ existiert.

Beweis:

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte, abelsche Gruppen existieren $a_1, \dots, a_k \in H$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $H = \langle a_1\rangle \times \dots \times \langle a_k\rangle$ und $|a_1|\,\big|\,|a_2|\,\big|\dots\big|\,|a_k|$. Man kann h somit schreiben als $h = a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{l_k}$ mit $l_i \in \{0, \dots, |a_i| - 1\}(i \in \{1, \dots, k\})$.

Es seien $I := \{i \in \{1, \dots, k\} | a_i^{l_i} \neq 1\}$ und $j = \min I$. Wegen $|h| = p$ kann man somit ohne Einschränkung annehmen, dass $h = \prod_{i\in I} a_i^{|a_i|/p} \in \langle\tilde{a}_j\rangle$ mit $\tilde{a}_j := \prod_{i\in I} a_i^{|a_i|/|a_j|}$ ist. Desweitern gilt offensichtlich $H = \langle a_1\rangle \times \dots \times \langle a_{j-1}\rangle \times \langle\tilde{a}_j\rangle \times\langle a_{j+1}\rangle\times \dots\times\langle a_k\rangle$. Mit $N_1 := \langle\tilde{a}_j\rangle$ und $N_2 := \prod_{\substack{i\in\{1,\dots,k\},\\ i\neq j}} \langle a_i\rangle$ folgt die Behauptung. □

1.9 Lemma:

Es gelten die Bezeichnungen 1.6. Desweiteren sei $U' \cap V' = \{1\}$ und es seien $U' \cap Z(G)$ und $V' \cap Z(G)$ zwei nichttriviale und zyklische Untergruppen von G. Zudem sei $\Omega_1(Z(G)) \cong C_p \times C_p$.

Dann existiert eine Untergruppe $W \subseteq U \cap V$ mit $U'W \cap V'W = W$ und $W \cap Z(G) = \{1\}$. Zusätzlich ist W maximal bzgl. der letzten Eigenschaft, d.h. es existiert keine Untergruppe $\tilde{W}$ von $U \cap V$ mit $W < \tilde{W}$ und $Z(G) \cap \tilde{W} = \{1\}$.

Beweis:

Es seien $z_1 \in U' \cap Z(G)$, $z_2 \in V' \cap Z(G)$ mit $\langle z_1 \rangle = \Omega_1(U' \cap Z(G))$ und $\langle z_2 \rangle = \Omega_1(V' \cap Z(G))$. Dann existieren nach Lemma 1.8 zyklische Untergruppen $U_1 \leq U'$, $V_1 \leq V'$ mit $z_1 \in U_1$, $z_2 \in V_1$ und es existieren Untergruppen $U_2 \leq U'$, $V_2 \leq V'$ mit $U' = U_1 \times U_2$ und $V' = V_1 \times V_2$. Da $U' \cap V' = \{1\}$ ist, gilt $U'V' = (U_1 \times V_1) \times (U_2 \times V_2)$. Desweiteren hat man $(U_2 \times V_2) \cap \Omega_1(Z(G)) = (U_2 \times V_2) \cap ((U_1 \cap \Omega_1(Z(G))) \times (V_1 \cap \Omega_1(Z(G)))) = \{1\}$ und somit ist $(U_2 \times V_2) \cap Z(G) = \{1\}$.

Es sei nun $W \leq U \cap V$ mit $U_2 \times V_2 \leq W$ und maximal bezüglich $W \cap Z(G) = \{1\}$. Nun betrachten wir $U'W \cap V'W$.

Man hat $U_1V_1 \cap W = \{1\}$, da $Z(G) \cap W = \{1\}$ ist und $\Omega_1(U_1V_1) = \Omega_1(Z(G))$ gilt. Dann ist U_1V_1W das direkte Produkt $U_1 \times V_1 \times W$. Somit ist $U'W \cap V'W = ((U_1 \times U_2)W) \cap ((V_1 \times V_2)W) = (U_1 \times W) \cap (V_1 \times W) = W$. Es folgt die Behauptung.

□

1.10 Folgerung:

Es gelten die Bezeichnungen 1.6. Die Kommutatorgruppe von G sei eine Untergruppe von $U \cap V$.

Genau dann existieren lineare Charaktere $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$, so dass $\ker(\varphi\uparrow_U^G) \cap \ker(\lambda\uparrow_V^G) = \{1\}$ ist und das Produkt der induzierten Charaktere, $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G$ ein irreduzibler Charakter von G ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $G = UV$;

(ii) $U' \cap V' = \{1\}$;

(iii) $Z(G)$ ist ein direktes Produkt zweier nichttrivialer, zyklischer Untergruppen;

(iv) $C_G(U \cap V) = U \cap V$ (insbesondere ist $U' \neq \{1\}$, $V' \neq \{1\}$);

(v) es gilt entweder

- (a) $U' \not\subseteq Z(G)$ oder
- (b) $U' \subseteq Z(G)$ und $C_G(Z(U)) = U$.

Beweis:

„⇒" Nach Satz 1.7 gelten die Bedingungen (i)-(iii) und (v). Aufgrund der Bedingung (v) des Satzes 1.7 gilt zunächst $[g, U \cap V] \neq \{1\}$ für alle $g \in G \setminus U \cap V$. Da $U \cap V$ wegen $U' \cap V' = \{1\}$ abelsch ist, folgt $C_G(U \cap V) = U \cap V$.

„⇐" Wir zeigen, dass die Bedingungen (i)-(vi) des Satze 1.7 erfüllt sind. Aufgrund der Bedingung (iv) ist das Zentrum von G eine Untergruppe von $U \cap V$. Also müssen nur noch die Bedingungen (v) und (vi) gezeigt werden. Mit den Voraussetzungen (ii)-(iv) folgt mit Lemma 1.9 die Existenz einer Untergruppe W von $U \cap V$ mit $U'W \cap V'W = W$ und W ist maximal bzgl. der Eigenschaft $Z(G) \cap W = \{1\}$. Es sei nun $g \in G$ mit $[g, U \cap V] \subseteq W$. Zunächst gilt für $w_1, w_2 \in U \cap V$:

$$[gw_1, w_2] = ((w_2^{-1})^g)^{w_1} w_2 = (w_2^{-1})^g w_2 = [g, w_2]$$

und somit ist $[g(U \cap V), U \cap V] = [g, U \cap V]$.

Nach Voraussetzung gilt $G' \subseteq U \cap V$ und somit ist $[g(U \cap V), U \cap V]^G = [(g(U \cap V))^G, (U \cap V)^G] = [g(U \cap V), U \cap V]$ und folglich ist $[g(U \cap V), U \cap V]$ ein Normalteiler von G.

Wegen $[g \cdot (U \cap V), U \cap V] \cap Z(G) \subseteq W \cap Z(G) = \{1\}$ ist $[g \cdot (U \cap V), U \cap V] = \{1\}$ und somit ist g ein Element von $C_G(U \cap V) = U \cap V$.

Es sei nun $v \in V$ mit $[v, Z(U)] \subseteq W$. Da das Zentrum von U als charakteristische Untergruppe des Normalteilers U ebenfalls normal ist, gilt zunächst für $w \in U \cap V$ und $z \in Z(U)$ die Gleichung

$$[vw, z] = w^{-1}(z^{-1})^v wz = (z^{-1})^v z = [v, z]$$

und somit ist $[v(U \cap V), Z(U)] = [v, Z(U)]$. Weiter gilt nun $[v, Z(U)]^G = [v(U \cap V), Z(U)]^G = [(v(U \cap V))^G, Z(U)^G] = [v(U \cap V), Z(U)] = [v, Z(U)]$ und damit ist $[v, Z(U)]$ ein Normalteiler von G. Wegen $[v \cdot (U \cap V), Z(U)] \cap Z(G) \subseteq W \cap Z(G) = \{1\}$ ist $[v, Z(U)] = \{1\}$ und damit ist v ein Element von $C_G(Z(U)) \cap V$.

Mit Satz 1.7 folgt nun die Behauptung. □

Mit den bisherigen Ergebnissen können wir in den nächsten zwei Folgerungen notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen für einen tensor-zerlegbaren Charakter vom Grad p^2 angeben.

1.11 Folgerung:

Es sei G eine endliche p-Gruppe. Genau dann existiert ein irreduzibler Charakter $\alpha \cdot \beta$ in G mit $\alpha(1) = p$, $\beta(1) = p$, $\ker(\alpha) \cap \ker(\beta) = \{1\}$ und $\alpha, \beta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$, wenn Folgendes gilt:

Es existieren zwei Untergruppen $U, V \leq G$ mit

(i) $[G : U] = [G : V] = p$;

(ii) $G = UV$;

(iii) $U' \cap V' = \{1\}$;

(iv) $Z(G)$ ist ein direktes Produkt zweier nichttrivialer, zyklischer Untergruppen;

(v) $U' \neq \{1\}$ und $V' \neq \{1\}$;

(vi) es gilt entweder

  (a) $U' \nsubseteq Z(G)$ oder

  (b) $U' \subseteq Z(G)$ und $Z(U) \neq Z(G)$.

Beweis:

Vorbemerkung: Es sei $\alpha \cdot \beta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ mit $\alpha \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$, $\beta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ und $\alpha(1) = \beta(1) = p$. Da eine p-Gruppe ebenfalls eine M-Gruppe ist[10], existieren $U, V \leq G$, lineare Charaktere $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $[G : U] = [G : V] = p$, $\alpha = \varphi\uparrow_U^G$ und $\beta = \lambda\uparrow_V^G$. Desweiteren sind U und V als maximale Untergruppen in G normal.

Hilfsbehauptung : Unter der Voraussetzungen $U' \cap V' = \{1\}$ und $p = [G : V] = [G : U]$ sind

$$U' \neq \{1\} \text{ und } V' \neq \{1\} \quad \text{äquivalent zu} \quad C_G(U \cap V) = U \cap V.$$

Beweis der Hilfsbehauptung : Wegen $p = [G : V]$ hat man ebenfalls $[U : U \cap V] = [UV : V] = [G : V] = p$, d.h. $U/(U \cap V)$ ist zyklisch. Also existiert ein Element $u \in U$ mit $U/(U \cap V) = \langle u \rangle (U \cap V)/(U \cap V)$.

„$\Leftarrow$": Wegen $C_G(U \cap V) = U \cap V$ gilt $[U, U \cap V] \neq \{1\}$ und $[V, U \cap V] \neq \{1\}$. Also sind $U' \neq \{1\}$ und $V' \neq \{1\}$.

[10] [1], (6.14) Corollary

„$\Rightarrow$": Es sei $g \in C_G(U \cap V) \setminus U \cap V$.

1. Fall: $g \in U \setminus U \cap V$. Da $U/(U \cap V)$ zyklisch von Primzahlordnung ist, gilt somit $U/(U \cap V) = \langle g \rangle (U \cap V)/(U \cap V)$. Nach Voraussetzung ist $U' \neq \{1\}$. Wegen $[g, U \cap V] = \{1\}$ folgt aus $U = \langle g, U \cap V \rangle$ und $U \cap V$ abelsch, dass U abelsch ist. Also ist $[g, U \cap V] \neq \{1\}$ und $g \notin C_G(U \cap V)$, ein Widerspruch.

2. Fall: $g \in V \setminus U \cap V$. Analog wie im ersten Fall ergibt sich ein Widerspruch.

3. Fall: $g \in C_G(U \cap V) \setminus (U \cup V)$. Wegen $G = UV$ existieren nun $u \in U \setminus U \cap V$ und $v \in V \setminus U \cap V$ mit $g = uv$.

Wegen $uv \in C_G(U \cap V)$, $U' \cap V' = \{1\}$ und $U' \subseteq U \cap V$ folgt mit Lemma 1.5(iv), dass $1 = [uv, h] = [u, h][v, h]$ für alle $h \in U \cap V$ ist. Insbesondere gilt $[u, h] = [v, h]^{-1}$ für alle $h \in U \cap V$. Folglich ist $[u, U \cap V] = \langle [u, h] \mid h \in U \cap V \rangle = \langle [v, h]^{-1} \mid h \in U \cap V \rangle = \langle [v, h] \mid h \in U \cap V \rangle = [v, U \cap V]$. Wegen $U' \cap V' = \{1\}$ erhält man somit $[u, U \cap V] = [v, U \cap V] = \{1\}$, also sind u und $v \in U \cap V$ (siehe 1.Fall), was wiederum $u, v \notin U \cap V$ widerspricht.

Desweiteren ist wegen $[G : (U \cap V)] = [G : V] \cdot [V : U \cap V] = p^2$ die Kommutatorgruppe von G eine Untergruppe von $U \cap V$.

Mit der Vorbemerkung, der Hilfsbehauptung und der Folgerung 1.10 folgt die Behauptung. $\square$

1.12 Folgerung:

Genau dann existiert ein tensor-zerlegbarer Charakter in G vom Grad p^2, wenn zwei Untergruppen U und V existieren mit

(i) $[G : U] = [G : V] = p$;

(ii) $G = UV$;

(iii) es existiert ein $X < U \cap V$ mit $X \triangleleft G$ und $U'X \cap V'X = X$;

(iv) $U' \not\subseteq X$ und $V' \not\subseteq X$;

(v) $Z(G/X)$ ist direktes Produkt zweier nichttrivialer, zyklischer Untergruppen von G/X;

(vi) es gilt entweder

  (a) $U'X/X \not\subseteq Z(U/X)$ oder

(b) $U'X/X \subseteq Z(U/X)$ und $Z(U/X) \neq Z(G/X)$.

Beweis:

„$\Leftarrow$": Wir betrachten die Gruppe G/X. Dann gilt $[G/X : U/X] = [G/X : V/X] = p$, $U/X \cdot V/X = U \cdot V/X = G/X$, $(U/X)' \cap (V/X)' = U'X/X \cap V'X/X = (U'X \cap V'X)/X = 1$ und $U'X/X, V'X/X \neq 1$. Mit Folgerung 1.11 folgt die Behauptung.

„$\Rightarrow$": Angenommen es existiert ein tensor-zerlegbarer Charakter in G vom Grad p^2. Dann existieren $U, V \leq G$ mit $[G : V] = [G : U] = p$, und es existieren $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$. Es sei $X := \ker(\varphi\uparrow_U^G) \cap \ker(\lambda\uparrow_V^G)$. Nun können $\varphi\uparrow_U^G$, $\lambda\uparrow_V^G$ als irreduzible und $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G$ als tensor-zerlegbarer Charakter von G/X angesehen werden. Mit der Folgerung 1.11 folgt nun ebenfalls die Behauptung. $\square$

Nun betrachten wir den Spezialfall von Gruppen der Ordnung p^6, dem wir uns auch in den letzten beiden Kapiteln widmen werden.

1.13 Folgerung:

Eine Gruppe G der Ordnung p^6 hat genau dann einen tensor-zerlegbaren Charakter, wenn zwei Untergruppen U und V der Ordnung p^5 existieren mit

(i) $G = UV$;

(ii) $U' \cap V' = \{1\}$;

(iii) $U' \neq \{1\}$ und $V' \neq \{1\}$;

(iv) es gilt entweder

(a) $U' \not\subseteq Z(G)$ oder

(b) $U' \subseteq Z(G)$ und $Z(U) \neq Z(G)$.

Beweis:

Es existieren keine p-Gruppen der Ordnung $\leq p^5$ mit einem tensor-zerlegbaren Charakter[11], also können nur tensor-zerlegbare Charaktere der Form $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G$ mit $U, V \leq G$, $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$, $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$, $\varphi(1) = \lambda(1) = 1$ und $\ker(\varphi\uparrow_U^G) \cap \ker(\lambda\uparrow_V^G) =$

[11] [1], siehe Abschnitt 3.1

$\{1\}$ existieren. Da das Quadrat des Grades eines irreduziblen Charakters immer kleiner als die Gruppenordnung ist, muss $\varphi{\uparrow}_U^G \cdot \lambda{\uparrow}_V^G$ den Grad p^2 besitzen.

Wir zeigen nun, dass aus den Bedingungen (i)-(iv) die Isomorphie $Z(G) \cong C_p \times C_p$ folgt. Wegen $U' \cap V' = \{1\}$ und $U', V' \neq \{1\}$ ist es ausreichend zu zeigen, dass $|Z(G)| = p^2$ ist. Mit der Hilfsbehauptung aus dem Beweis von Folgerung 1.11 ist das Zentrum von G eine Untergruppe von $U \cap V$. Falls nun $|Z(G)| > p^2$ ist, gilt $[U : Z(G)] \leq p^2$ und somit ist $U' \leq Z(G)$.

Nach Bedingung (iv) ist folglich $Z(U) \neq Z(G)$ und somit muss wegen $Z(G) \subseteq Z(U)$ dann $|Z(U)| \geq p^4$ gelten. Allerdings folgt aus $|Z(U)| \geq p^4$ und $|U| = p^5$ schon $U' = \{1\}$. Man erhält einen Widerspruch.

Mit Folgerung 1.11 folgt somit die Behauptung. $\square$

Kapitel 2

Verallgemeinerung des Beispiels von D. Ritter

In diesem Kapitel konstruieren wir für $n \geq 6$ und hinreichend großes p eine Gruppe der Ordnung p^n, welche einen nichttrivialen tensor-zerlegbaren Charakter besitzt. Dies ist eine Verallgemeinerung einer Konstruktion von D. Ritter[1] für Gruppen der Ordnung p^6.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnung ein:

2.1 Bezeichnung:

Für eine quadratische Matrix A und $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A^{(i)} := \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \sum_{j=0}^{i-1} A^j, & i > 0. \end{cases}$$

Für spätere Rechnungen ist folgende offensichtliche Gleichung hilfreich:

$$A^{(k+i)} = A^{(k)} A^i + A^{(i)}$$

für k, $i \in \mathbb{N}_0$.

[1] [1], vgl. Abschnitt 3.3

2.2 Lemma:

(i) Es sei K ein Körper und $J_n \in K^{n\times n}$ mit

$$J_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt[2] für $i \in \mathbb{N}$

$$J_n^i = \begin{pmatrix} \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & \cdots & \cdots & \binom{i}{n-1} \\ 0 & \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{i}{0} & \binom{i}{1} \\ 0 & & & 0 & \binom{i}{0} \end{pmatrix}$$

sowie

$$J_n^{(i)} = \begin{pmatrix} \binom{i}{1} & \binom{i}{2} & \cdots & \cdots & \binom{i}{n} \\ 0 & \binom{i}{1} & \binom{i}{2} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{i}{1} & \binom{i}{2} \\ 0 & & & 0 & \binom{i}{1} \end{pmatrix}.$$

Man beachte hierbei, dass per definitionem $\binom{0}{0} := 1$ und $\binom{i}{k} = 0$ für $k > i$ ist.

(ii) Es sei $K = \mathbb{F}_p$. Dann gilt:

(a) Es ist genau dann $|J_n| = p$, wenn $p \geq n$ ist.

(b) Es ist genau dann $J_n^{(p)} = 0$, wenn $p \geq n+1$ ist.

Beweis: zu (i): Wir beweisen zunächst die erste Behauptung durch Induktion über i.

Für $i = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

[2] [1], vgl. S.53, Inductions (1) und (2)

„$i \to i+1$": Man hat $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ für k, $m \in \mathbb{N}$ und somit erhält man

$$J_n^{i+1} = J_n J_n^i \overset{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & \cdots & \cdots & \binom{i}{n-1} \\ 0 & \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{i}{0} & \binom{i}{1} \\ 0 & & & 0 & \binom{i}{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{i}{0} + 0 & \binom{i}{1} + \binom{i}{0} & \cdots & \cdots & \binom{i}{n-1} + \binom{i}{n-2} \\ 0 & \binom{i}{0} + 0 & \binom{i}{1} + \binom{i}{0} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{i}{0} + 0 & \binom{i}{1} + \binom{i}{0} \\ 0 & & & 0 & \binom{i}{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{i+1}{0} & \binom{i+1}{1} & \cdots & \cdots & \binom{i+1}{n-1} \\ 0 & \binom{i+1}{0} & \binom{i+1}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{i+1}{0} & \binom{i+1}{1} \\ 0 & & & 0 & \binom{i+1}{0} \end{pmatrix}.$$

Es folgt die 1. Aussage.

Nun benötigen wir folgende Hilfsbehauptung:

Hilfsbehauptung:

Für alle $k, i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{i-1} \binom{j}{k} = \binom{i}{k+1}.$$

Beweis: Die Behauptung wird wieder über Induktion über i gezeigt.

„$i = 1$": $\sum_{j=0}^{i-1} \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^{0} \binom{j}{k} = \binom{0}{k} = \delta_{0,k} = \delta_{1,k+1} = \binom{1}{k+1}$.

„$i \to i+1$": $\sum_{j=0}^{i+1-1} \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{j}{k} + \binom{i}{k} \overset{\text{I.V.}}{=} \binom{i}{k+1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k+1}$.

Es folgt die Behauptung.

Damit ergibt sich mit der ersten Aussage

$$
\begin{aligned}
J_n^{(i)} &= \begin{pmatrix}
\sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{0} & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{1} & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{n-1} \\
0 & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{0} & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{1} & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{0} & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{1} \\
0 & & & 0 & \sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{0}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\binom{i}{1} & \binom{i}{2} & \cdots & \cdots & \binom{i}{n} \\
0 & \binom{i}{1} & \binom{i}{2} & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & \binom{i}{1} & \binom{i}{2} \\
0 & & & 0 & \binom{i}{1}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und somit die Behauptung.

zu (ii): Da Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind, ist für $1 \leq k < p$ die Primzahl p ein Teiler von $\binom{p}{k} = p!/(p-k)!k!$. Für $k = p$ gilt $\binom{p}{p} = 1$ und falls $k > p$ ist, hat man per definitionem $\binom{p}{k} = 0$. Somit erhält man mit (i), dass $J_n^p = E_n + (\delta_{k+p,l})_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots n}}$ und $J_n^{(p)} = (\delta_{k+p-1,l})_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots n}}$ sind. Es folgt die Behauptung. $\square$

Im Folgenden werden wir eine p-Gruppe G mit einem tensor-zerlegbaren Charakter konstruieren.

Zunächst betrachten wir eine Untergruppe U von $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p^{n+2})$ und zeigen, dass ein Element y der Automorphismengruppe von U der Ordnung p mit bestimmten Eigenschaften existiert.

Anschließend konstruieren wir die Gruppe G als semidirektes Produkt der Gruppe U und $\langle y \rangle$.

Die affine Gruppe $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p^{n+2})$ identifizieren wir mit

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathrm{GL}_{n+2}(p), v \in \mathbb{F}_p^{n+2} \right\}.$$

Dabei stellt $\cdot$ hier und im Folgenden eine 0 bzw. 0-Untermatrix geeigneter Dimension in Matrixdarstellungen dar.

2.3 Bezeichnung und Bemerkung:

Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $1 < m < n+1$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geq \max\{n+3-m, m+2\}$. Weiter seien

$$M_m \;:=\; \begin{pmatrix} E_m & \\ & J_{n+2-m} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & \end{array}\right)$$

und

$$\begin{aligned} N_m \;&:=\; \begin{pmatrix} J_{m+1}^{tr} & \\ & E_{n+1-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m^{tr} & \\ A & E_{n+2-m} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{F}_p^{(n+2)\times(n+2)}. \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass $M_m N_m = N_m M_m$ ist und nach Lemma 2.2 (ii) (a), (b) die Matrizen M_m und N_m die Ordnung p haben und $N_m^{(p)} = M_m^{(p)} = 0$ ist. Die Standardbasiselemente von $\mathbb{F}_p^{n+2}$ seien $(e_1, \ldots, e_{n+2})$.

Weiter seien

$$x_m := \begin{pmatrix} M_m & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p^{n+2}),$$

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} E_{n+2} & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; v \in \mathbb{F}_p^{n+2} \right\}$$

und

$$U_m := \langle x, T \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} M_m^i & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq i \leq p-1, v \in \mathbb{F}_p^{n+2} \right\} \leq \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p^{n+2}).$$

2.4 Lemma:

Die Gruppe U_m besitzt einen Automorphismus y_m der Ordnung p mit

$$\begin{pmatrix} M_m^i & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix}^{y_m} = \begin{pmatrix} M_m^i & \cdot \\ e_{m+1}M_m^{(i)} + vN_m & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$.

<u>Beweis:</u>

Zunächst seien $M := M_m$, $N := N_m$, $U := U_m$ und $y := y_m$.

Die Abbildung y sei wie folgt definiert

$$y : U \to U, \ \begin{pmatrix} M & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M^i & \cdot \\ e_{m+1}M^{(i)} + vN & 1 \end{pmatrix}$$

für $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$.

Wir zeigen nun, dass

(i) y ein Homomorphismus und

(ii) $y^p = \mathrm{id}_U$ ist.

<u>zu (i):</u> Es seien $i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ und $v, v' \in \mathbb{F}_p^{n+2}$.

1. Fall: $i + j < p$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} M^i & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M^j & \cdot \\ v' & 1 \end{pmatrix}\right)^y &= \begin{pmatrix} M^{i+j} & \cdot \\ vM^j + v' & 1 \end{pmatrix}^y \\
&= \begin{pmatrix} M^{i+j} & \cdot \\ e_{m+1}M^{(i+j)} + vM^jN + v'N & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{MN=NM}{=} \begin{pmatrix} M^{i+j} & \cdot \\ e_{m+1}(M^{(i)}M^j + M^{(j)}) + vNM^j + v'N & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M^iM^j & \cdot \\ (e_{m+1}M^{(i)} + vN)M^j + e_{m+1}M^{(j)} + v'N & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M^i & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix}^y \begin{pmatrix} M^j & \cdot \\ v' & 1 \end{pmatrix}^y.
\end{aligned}$$

2. Fall: $i + j \geq p$.

Es sei $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $i+j = k+p$. Wegen $M^{(p)} = 0$ nach Bemerkung 2.3 ist $M^{(i+j)} = M^{(k+p)} = M^{(k)}M^p + M^{(p)} = M^{(k)}$. Damit folgt analog wie im ersten Fall die Behauptung.

zu (ii): Mit Induktion erhält man

$$\begin{pmatrix} M & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}^{y^k} = \begin{pmatrix} M & \cdot \\ e_{m+1}N^{(k)} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} E & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix}^{y^k} = \begin{pmatrix} E & \cdot \\ vN^k & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Da $N^{(p)} = 0$, $N^p = E$ nach Bemerkung 2.3 und y ein Homomorphismus ist, gilt somit $y^p = \mathrm{id}_U$. Es folgt (ii).

Mit (i) und (ii) folgt die Behauptung. □

2.5 Satz:

Es sei $G_m := \langle y_m \rangle \ltimes U_m$.

Die Gruppe G_m besitzt einen tensor-zerlegbaren Charakter.

Beweis:

Es seien $M := M_m$, $N := N_m$, $y := y_m$, $x := x_m$, $U := U_m$ und $G := G_m$. Weiter identifizieren wir $\langle y \rangle$ und U mit Untergruppen von G. Offensichtlich ist $T^y = T$ und somit ist $V := \langle y, T \rangle$ eine Untergruppe von G vom Index p. Zudem ist $U \cap V = T$ und $G = VU = UV$.

Für $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$ sei

$$\overline{v} := \begin{pmatrix} E & \cdot \\ v & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Wir bestimmen nun die Kommutatorgruppe von V und U. Es gilt

$$\begin{aligned} [y, \overline{v}] &= y^{-1}\overline{v}^{-1}y\overline{v} = y^{-1}\overline{-v}y\overline{v} \\ &= \overline{-vN+v} = \overline{-v(N-E)} \end{aligned}$$

sowie $[y, \overline{v}]^y = [y, \overline{vN}]$ für alle $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$. Somit ist $V_1 := \langle \overline{v(N-E)} \mid v \in \mathbb{F}_p^{n+2} \rangle = \langle \overline{e_1}, \ldots, \overline{e_m} \rangle$ eine Untergruppe von V' und ein Normalteiler von G. Da offensichtlich

V/V_1 abelsch ist, folgt $V_1 = V'$. Analog zeigt man, dass $U' = \langle v(M-E) \mid v \in \mathbb{F}_p^{n+2}\rangle = \langle \overline{e_{m+2}}, \ldots, \overline{e_{n+2}}\rangle$ ist. Damit sind $U', V' \neq \{1\}$ und $U' \cap V' = \{1\}$.

Nun bestimmen wir das Zentrum von G. Wir zeigen zunächst, dass $Z(G)$ in U enthalten ist. Angenommen es existiert ein Element $z \in Z(G) \setminus U$, dann ist ohne Einschränkung $z = yx^i\overline{w}$ mit $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $w \in \mathbb{F}_p^{n+2}$. Für ein beliebiges $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$ ist $(yx^i\overline{w})^{\overline{v}} = yx^i\overline{-vNM^i + w + v}$ und folglich ist $NM^i = E$. Wegen $NM^i \neq E$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ergibt sich ein Widerspruch und es folgt $Z(G) \subseteq U$ und $Z(G) \subseteq Z(U)$.

Weiter erhält man mit Lemma 1.5 (i) die Gleichung $[x\overline{w}, \overline{v}] = [x, \overline{v}] = \overline{-v(M-E)}$ für alle $v, w \in \mathbb{F}_p^{n+2}$ und damit ist $Z(U) = \langle \overline{v} \mid v \in \mathrm{Fix}_M\rangle = \langle \overline{e_1}, \ldots, \overline{e_m}, \overline{e_{n+2}}\rangle$. Wegen $[y, \overline{v}] = \overline{-v(N-E)}$ für alle $v \in \mathbb{F}_p^{n+2}$ ist $Z(G) = \langle \overline{v} \mid v \in \mathrm{Fix}_M \cap \mathrm{Fix}_N\rangle$. Da $\mathrm{Fix}_M \cap \mathrm{Fix}_N = \langle e_1, \ldots, e_m, e_{n+2}\rangle \cap \langle e_1, e_{m+2}, \ldots, e_{n+2}\rangle = \langle e_1, e_{n+2}\rangle$ ist, gilt $Z(G) = \langle \overline{e_1}, \overline{e_{n+2}}\rangle$ und $Z(G) \neq Z(U)$. Zusammenfasssend erhält man $G = UV$, $[G:U] = [G:V] = p$, $U' \cap V' = \{1\}$, $Z(G) = \langle \overline{e_1}, \overline{e_{n+2}}\rangle \cong C_p \times C_p$, $U' \neq \{1\}$, $V' \neq \{1\}$ und $Z(G) \neq Z(U)$.

Mit Folgerung 1.13 folgt die Existenz eines tensor-zerlegbaren Charakters vom Grad p^2. □

Im Wesentlichen interessieren wir uns für nichttriviale Beispiele von Gruppen mit einem tensor-zensorlegbaren Charakter. Es ist z.B. offensichtlich, dass ein direktes Produkt zweier nichtabelscher Gruppen einen tensor-zerlegbaren Charakter besitzt. Um triviale Beispiele zu vermeiden, interessiert man sich nur für Charaktere, welche nichttrivial tensor-zerlegbar sind.

2.6 Definition:

Es sei χ ein irreduzibler $\mathbb{C}$-Charakter von G. Man nennt χ trivial tensor-zerlegbar, falls ein echter Normalteilter N von G, ein nichtlinearer irreduzibler Charakter von N und $e \in \mathbb{N}_{>1}$ mit $\chi\downarrow_N = e \cdot \nu$ existieren.

2.7 Folgerung:

Es sei G das direkte Produkt zweier nichtabelscher Untergruppen. Dann besitzt G einen trivial tensor-zerlegbaren Charakter.

Beweis: Klar. □

2.8 Satz: (Clifford)

Es seien $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ ein trivial tensor-zerlegbarer Charakter und N, e sowie ν entsprechend der Definition 2.6. Dann existiert ein projektiver Charakter ν_1 von G und ein projektiver Charakter ν_2 von G/N mit $\chi = \nu_1 \cdot \nu_2$.

Beweis: [6], siehe Satz 21.2. □

2.9 Bemerkung:

Die tensor-zerlegbaren Charaktere der Gruppe G in Satz 2.5 sind nichttrivial tensor-zerlegbar.

Beweis: Die Notation entspreche jener aus dem Beweis von Satz 2.5. Wir bestimmen die Kommutatorgruppe von G. Es gilt

$$[y, x^{-1}] \;=\; y^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{p-1} = x\overline{e_{m+1}}x^{p-1} = \overline{e_{m+1}M^{p-1}}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} e_{m+1}M^{p-1} &= e_{m+1}\begin{pmatrix} E_m & \cdot \\ \cdot & J_{n+2-m}^{p-1} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{La. 2.2}}{=} \sum_{i=0}^{n+1-m} \binom{p-1}{i} e_{m+1+i} \\ &= e_{m+1} + \sum_{i=1}^{n+1-m} \binom{p-1}{i} e_{m+1+i}. \end{aligned}$$

Wegen $\overline{\sum_{i=1}^{n+1-m} \binom{p-1}{i} e_{m+1+i}} \in \langle U', V' \rangle$ gilt $\overline{e_{m+1}} \in G'$ und somit ist $\langle U', V', \overline{e_{m+1}} \rangle = T \leq G'$. Da T ein Normalteiler von G mit Index p^2 in G ist, folgt $T = G'$. Analog zum Beweisabschluss von Theorem 3.3.1 in der Diplomarbeit von D. Ritter[3] folgt wegen $[G : G'] = p^2$ und $G'' = \{1\}$, dass die tensor-zerlegbaren Charaktere vom Grad p^2 nichttrivial tensor-zerlegbar sind. □

[3] [1], vgl. S. 54f.

Kapitel 3

Gruppen der Ordnung p^6 mit tensor-zerlegbaren Charakteren

Nun bestimmen wir alle Gruppen der Ordnung p^6 mit tensor-zerlegbaren Charakteren über $\mathbb{C}$ mithilfe des Begriffs der Isoklinie und der Charakterisierung aller Gruppen der Ordnung p^6 von Rodney James.

3.1 Definition:

Zwei Gruppen G und H nennt man isoklin zueinander, falls zwei Isomorphismen ν_1 und ν_2 mit

$$\nu_1 : G/Z(G) \to H/Z(H)$$

und

$$\nu_2 : G' \to H'$$

existieren, so dass $\nu_2([\alpha, \beta]) = [\alpha', \beta']$ für alle $\alpha, \beta \in G$ und $\alpha', \beta' \in H$ mit $\nu_1(\alpha Z(G)) = \alpha' Z(H)$ und $\nu_1(\beta Z(G)) = \beta' Z(H)$ ist.

3.2 Definition und Bemerkung:

Eine Gruppe G mit $Z(G) \subseteq G'$ und minimaler Ordnung in ihrer Isoklinieklasse nennt man Stammgruppe. Es kann gezeigt werden, dass jede Isoklinieklasse eine Stammgruppe besitzt[1].

Nun stellt sich die Frage: Falls G einen tensor-zerlegbaren Charakter hat, besitzen dann isokline Gruppen zu G ebenfalls einen tensor-zerlegbaren Charakter? Dazu

[1] [2], vgl. S.134f, 140

wiederholen wir zunächst die Ergebnisse des Abschnittes III.5 des Buches [2] *Group Extensions, Representations, and the Schur Multiplicator* von F. Rudolf Beyl und Jürgen Tappe.

3.3 Bezeichnungen:

Es seien G und H zwei endliche Gruppen, welche isoklin zueinander sind und G sei eine Stammgruppe.

Da G und H isoklin zueinander sind, existieren Isomorphismen ν_1 und ν_2 entsprechend der Definition 3.1. Ab jetzt seien $Z := Z(G)$ und $Y := Z(H)$. Da G eine Stammgruppe ist, gilt $Z \subseteq G'$.

Es seien $g_1, g_2 \in G$ und $h_1, h_2 \in H$ mit $\nu_1(g_1 Z) = h_1 Y$ und $\nu_1(g_2 Z) = h_2 Y$. Dann gilt $\nu_2([g_1, g_2])Y = [h_1, h_2]Y = [h_1 Y, h_2 Y] = [\nu_1(g_1 Z), \nu_1(g_2 Z)] = \nu_1([g_1, g_2]Z)$. Da ν_1 und ν_2 Homomorphismen sind und sich jedes Element aus $Z \cap G'$ als Produkt von Kommutatoren schreiben lässt, gilt $\nu_2(Z) = \nu_2(Z \cap G') \subseteq Y$. Also kann man ohne Einschränkung $\nu_2 \downarrow_Z$ als Einbettung von Z in Y ansehen und $Z \subseteq Y$ annehmen. Weiter sind ν_1 und ν_2 Isomorphismen und somit erhält man ebenfalls

$$Z = Z \cap G' = \nu_2(Z \cap G') = Y \cap H'. \tag{3.0.1}$$

3.4 Definition und Bemerkung:

[3] Es sei

$$L := G \curlywedge H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H, \nu_1(gZ) = hY\}.$$

Dann ist[4] L isoklin zu G und H. Desweiteren gilt $Z(L) = Z \times Y$ sowie

$$[(g_1, h_1), (g_2, h_2)] = ([g_1, g_2], [h_1, h_2]) = ([g_1, g_2], \nu_2([g_1, g_2])$$

für (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in L$. Somit ist $L' = \{(g, \nu_2(g)) \mid g \in G'\}$. Wegen $\nu_2 \downarrow_Z = \mathrm{id}_Z$ und $Z(L) = Z \times Y$ gilt damit

$$Z(L) \cap L' = \{(z, z) \mid z \in Z\}. \tag{3.0.2}$$

3.5 Bezeichnung:

Es sei

$$\lambda : \{\text{irreduzible } \mathbb{C}G\text{-Darstellungen modulo Äquivalenz}\} \to \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*), D \mapsto \lambda(D)$$

---

[2] [2], vgl. S.171-173

[3] [2], s.S.171

[4] [2], III(1.1)

wie folgt definiert: Das Bild $\lambda(D) \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ sei jenes eindeutige Element von $\mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ mit $D{\downarrow_Z}= \lambda(D) I_m$, wobei m der Grad von D ist.

Desweiteren bezeichne

$$\mu : \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*), \alpha \mapsto \mu(\alpha)$$

eine Abbildung, welche einem Element $\alpha \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ eine Fortsetzung $\mu(\alpha) \in \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*)$ zuordnet, d.h. $\mu(\alpha){\downarrow_Z}= \alpha$. Die Auswahl der Fortsetzung sei beliebig, aber fest.

Schließlich sei

$$\mu^* : \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*), \alpha \mapsto \mu^*(\alpha),$$

wobei $\mu^*(\alpha) \in \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*)$ so gewählt ist, dass $\mu^*(\alpha)(z, y) = \alpha(z)^{-1}\mu(\alpha)(y)$ für alle $(z, y) \in Z \times Y \leq G \curlywedge H = L$ gelte. Die Auswahl sei beliebig, aber fest.

3.6 Bemerkung:

Die Abbildungen λ, μ und μ^* existieren.

<u>Beweis:</u>

<u>zu λ</u>: Die Abbildung existiert offensichtlich[5].

<u>zu μ</u>: Das Zentrum von G ist eine Untergruppe der abelschen Gruppe $Z(H) = Y$. Also existiert zu jedem Element von $\mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ eine Fortsetzung[6] in $\mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*)$.

<u>zu μ^*</u>: Für $\alpha \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ sei $\alpha^{-1}\mu(\alpha) \in \mathrm{Hom}(Z \times Y, \mathbb{C}^*)$ wie folgt definiert: $\alpha^{-1}\mu(\alpha)(z, y) := \alpha(z)^{-1}\mu(\alpha)(y)$ für alle $(z, y) \in Z \times Y$.

Für $z \in Z$ hat man

$$\alpha^{-1}\mu(\alpha)(z, z) = \alpha(z)^{-1}\mu(\alpha)(z) = \alpha(z)^{-1}\mu(\alpha){\downarrow_Z}(z) = \alpha(z)^{-1}\alpha(z) = 1$$

und somit gilt $Z(L) \cap L' \overset{3.0.2}{=} \{(z, z) \mid z \in Z\} \subseteq \ker(\alpha^{-1}\mu(\alpha))$. Da $Z(L)L'/L' \overset{\text{kan.}}{\cong} Z(L)/(L' \cap Z(L))$ ist, kann $\alpha^{-1}\mu(\alpha)$ als Element von $\mathrm{Hom}(Z(L)L'/L', \mathbb{C}^*)$ aufgefasst werden. Wegen $Z(L)L'/L' \leq L/L'$ und $\mathrm{Hom}(L/L', \mathbb{C}^*) \overset{\text{kan.}}{\cong} \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*)$ existiert eine Fortsetzung[7] $\mu^* = \mu^*(\alpha) \in \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*)$ von $\alpha^{-1}\mu(\alpha)$. Diese sei beliebig, aber fest.$\square$

[5] [3], (2.25) Lemma
[6] [3], (5.5) Corollary, s.S.63
[7] [3], (5.5) Corollary, s.S.63

3.7 Lemma:

Es sei $X := \{(z,1) \mid z \in Z\}$. Die Abbildung $L/X \to H$, $(g,h)X \mapsto h$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wir betrachten die Projektion $\varphi : L \to H$, $(g,h) \mapsto h$. Es gilt $\ker(\varphi) = \{(g,1) \mid (g,1) \in L\} = \{(g,1) \mid \nu_1(gZ) = Y\} = \{(z,1) \mid z \in Z\} = X$. Mit dem Isomorphiesatz folgt die Behauptung. $\square$

3.8 Bemerkung:

Es seien μ_1^*, μ_1 und μ_2^*, μ_2 verschiedene Abbildungen gemäß Bezeichnung 3.5, d.h. $\mu_i^* : \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*)$, $\mu_i : \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*)$ mit $\mu_i^*(\alpha)(z,y) = \alpha(z)^{-1}\mu_i(\alpha)(y)$ für $(z,y) \in Z \times Y$ und $\mu_i(\alpha)\downarrow_Z = \alpha$ für $i = 1,2$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$. Dann ist für $\alpha \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ die folgende Abbildung ein Homomorphismus und wohldefiniert:

$$\mu_1^*(\alpha)\mu_2^*(\alpha)^{-1} : H \to \mathbb{C}^*, h \mapsto \mu_1^*(\alpha)(g,h) \cdot \mu_2^*(\alpha)(g,h)^{-1},$$

wobei $g \in G$ so gewählt wird, dass $(g,h) \in G \curlywedge H$ ist.

Beweis: Nach 3.5 ist $L \to \mathbb{C}^*, (g,h) \mapsto \mu_1^*(\alpha)(g,h) \cdot \mu_2^*(\alpha)(g,h)^{-1}$ ein Homomorphismus. Für $z \in Z$ ist

$$\mu_1^*(\alpha)(z,1) \cdot \mu_2^*(\alpha)(z,1)^{-1} = \alpha(z)^{-1}\mu_1(\alpha)(1)(\alpha(z)^{-1}\mu_2(\alpha)(1))^{-1} = \alpha(z)^{-1} \cdot \alpha(z) = 1.$$

Somit ist

$$X = \{(z,1) \mid z \in Z\} \subseteq \ker(\mu_1^*(\alpha)\mu_2^*(\alpha)^{-1}).$$

Mit Lemma 3.7 folgt die Behauptung. $\square$

3.9 Bemerkung und Bezeichnung:

Es sei $D : G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ die Matrixdarstellung modulo Äquivalenz eines irreduziblen Moduls vom Grad $m \in \mathbb{N}$.

Dann ist die folgende Abbildung wohldefiniert und eine irreduzible $\mathbb{C}H$-Darstellung:

$$\hat{D} : H \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}), h \mapsto \tilde{D}(g,h) := \mu^*(\lambda(D))(g,h) \cdot D(g),$$

wobei $g \in G$ so gewählt wird, dass $(g,h) \in G \curlywedge H$ ist.

Beweis:

Die Abbildung

$$\tilde{D} : L \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}), (g,h) \mapsto \mu^*(\lambda(D))(g,h)D(g)$$

ist eine irreduzible Matrixdarstellung, denn D ist eine irreduzible $\mathbb{C}G$-Darstellung und nach 3.5 ist $\mu^*(\lambda(D)) \in \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C}^*)$. Wegen

$$\tilde{D}(z,1) = \mu^*(\lambda(D))(z,1)D(z) \overset{3.5}{=} \lambda(z)^{-1}\mu(\lambda(D))(1)D(z) = \lambda(z)^{-1} \cdot \lambda(z) I_m = I_m$$

ist $X = \{(z,1) \mid z \in Z\} \subseteq \ker(\tilde{D})$.

Mit Lemma 3.7 erhält man die Behauptung. $\square$

3.10 Bezeichnung:

Es sei $U := \mathrm{Hom}(H/YH', \mathbb{C}^*)$ und man fasse U als Untergruppe von $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ auf. Man hat

$$\begin{aligned} |\mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^*)|/|\mathrm{Hom}(H/YH',\mathbb{C}^*)| &= |H/H'|/|H/YH'| = |YH'|/|H'| \\ &= |Y|/|Y \cap H'| \overset{\text{GL. 3.0.1}}{=} |Y|/|Z| \end{aligned}$$

Nebenklassen von $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ in U. Die Vertreter der Nebenklassen seien mit $\{\tau_1, \ldots, \tau_{|Y|/|Z|}\}$ bezeichnet.

3.11 Lemma:

Für $i \in \{1, \ldots, |Y/Z|\}$ und $\lambda \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)$ seien $\nu_i(\lambda) \in \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*)$ wie folgt definiert:

$$\nu_i(\lambda) : Y \to \mathbb{C}^*, y \mapsto \mu(\lambda)(y)\tau_i(y).$$

Dann sind die Homomorphismen $\nu_i(\lambda)$ paarweise verschieden und es gilt

$$\mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*) = \{\nu_i(\lambda) \mid i \in \{1, \ldots, |Y/Z|\}, \lambda \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C}^*)\}.$$

<u>Beweis:</u> Es sei ϱ ein beliebiges Element von $\mathrm{Hom}(Y, \mathbb{C}^*)$ und $\lambda := \varrho\downarrow_Z$. Nun betrachtet man $\mu(\lambda)^{-1}\varrho : Y \to \mathbb{C}^*, y \mapsto \mu(\lambda)(y)^{-1}\varrho(y)$. Es gilt $\mu(\lambda)^{-1}\varrho\downarrow_Z = 1$ und somit ist $\mu(\lambda)^{-1}\varrho \in \mathrm{Hom}(Y/Z, \mathbb{C}^*) \overset{\text{GL 3.0.1}}{=} \mathrm{Hom}(Y/Y \cap H')$. Wegen $Y/Y \cap H' \overset{\text{kan.}}{\cong} YH'/H'$ kann $\mu(\lambda)^{-1}\varrho$ als Element von $\mathrm{Hom}(YH'/H')$ aufgefasst werden. Es sei $(\mu(\lambda)^{-1}\varrho)^* \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ eine Fortsetzung[8] von $\mu(\lambda)^{-1}\varrho$. Dann existieren $i \in \{1, \ldots, |Z/Y|\}$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}(H/YH', \mathbb{C}^*)$ mit $(\mu(\lambda)^{-1}\varrho)^* = \tau_i\alpha$. Insbesondere gilt somit

$$\mu(\lambda)^{-1}\varrho = (\mu(\lambda)^{-1}\varrho)^*\downarrow_Y = \tau_i\downarrow_Y \alpha\downarrow_Y = \tau_i\downarrow_Y,$$

[8] [3], (5.5) Corollary, s.S.63

also ist $\mu(\lambda)^{-1}\varrho = \tau_i{\downarrow_Y}$ bzw. $\varrho = \tau_i{\downarrow_Y}\ \mu(\lambda) = \nu_i(\lambda)$. Weiter sind wegen

$$|\mathrm{Hom}(Y,\mathbb{C}^*)| = |Y| = |Y/Z| \cdot |Z| = |Y/Z| \cdot |\mathrm{Hom}(Z,\mathbb{C}^*)|$$

die Homomorphismen $\nu_i(\lambda)$ paarweise verschieden. Es folgt die Behauptung. □

3.12 Satz:

Es seien D_1 und D_2 zwei irreduzible $\mathbb{C}G$-Darstellungen vom Grad $m \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Matrixdarstellungen $\hat{D}_1\tau_i$ und $\hat{D}_2\tau_j$ sind äquivalent.

(ii) Es ist $i = j$ und D_1 ist äquivalent zu D_2.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sind D_1 und D_2 äquivalent, dann gilt zunächst $\lambda(D_1) = \lambda(D_2)$, und gemäß Konstruktion sind $\hat{D}_1\tau_i$ und $\hat{D}_2\tau_i$ äquivalent zueinander.

„$\Rightarrow$" Gemäß der Notation von Lemma 3.11 hat man $\hat{D}_k\tau_l{\downarrow_{Z(H)}} = \nu_l(\lambda(D_k)) \cdot I_m$ für $k \in \{1,2\}$ und $l \in \{i,j\}$. Da $\hat{D}_1\tau_i$ und $\hat{D}_2\tau_j$ äquivalent zueiander sind, gilt $\nu_i(\lambda(D_1)) = \nu_j(\lambda(D_2))$. Also gelten nach Lemma 3.11 die Gleichungen $i = j$ und $\lambda(D_1) = \lambda(D_2)$. Demnach ist ebenfalls $\mu^*(\lambda(D_1)) = \mu^*(\lambda(D_2))$. Da $\hat{D}_1\tau_i$ und $\hat{D}_2\tau_j$ äquivalent zueinander sind, folgt, dass die Darstellungen D_1 und D_2 äquivalent zueinander sind. □

3.13 Folgerung:

Es seien $D_1, \ldots, D_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sämtliche irreduzible $\mathbb{C}G$-Darstellungen modulo Äquivalenz. Dann sind $\{\hat{D}_i\tau_j \mid i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,|Y/Z|\}\}$ die irreduziblen $\mathbb{C}H$-Darstellungen modulo Äquivalenz.

Beweis: Nach Satz 3.12 sind die Darstellungen $\hat{D}_i\tau_j$ nicht äquivalent zueinander. Die zugehörigen irreduziblen Charaktere von $\hat{D}_i\tau_j$ werden mit $\chi_{i,j}$ bezeichnet. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{|Y/Z|}\chi_{i,j}(1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{|Y/Z|}\chi_{i,1}(1)^2 = |Y/Z| \cdot \sum_{i=1}^{n}\chi_{i,1}(1)^2 \\ &= |Y/Z||G| = |G/Z| \cdot |Y| \overset{G/Z\cong H/Y}{\cong} |H/Y| \cdot |Y| = |H|\end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. □

3.14 Satz:

Es seien $D_1, \ldots, D_n$ sämtliche $\mathbb{C}G$-Darstellungen modulo Äquivalenz und $D_1, \ldots, D_{\tilde{n}}$ seien die tensor-zerlegbaren $\mathbb{C}G$-Darstellungen modulo Äquivalenz mit $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ und $\tilde{n} \leq n$. Dann sind

$$\{\hat{D}_i \tau_j \mid i \in \{1, \ldots, \tilde{n}\}, j \in \{1, \ldots, |Y/Z|\}\}$$

sämtliche tensor-zerlegbaren $\mathbb{C}H$-Darstellungen modulo Äquivalenz.

<u>Beweis:</u> Es seien $D : G \to \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$, $D' : G \to \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$ zwei irreduzible Matrixdarstellungen, so dass $D \otimes D'$ ebenfalls eine irreduzible Darstellung ist. Desweiteren seien $\mu_0^* := \mu^*(\lambda(D \otimes D'))$, $\mu_1^* := \mu^*(\lambda(D))$ und $\mu_2^* := \mu^*(\lambda(D'))$.

Es seien $h \in H$ und $g \in G$ mit $(g, h) \in L$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{D \otimes D}'(h)\tau_i(h) &= \mu_0^*(g,h)(D \otimes D')(g)\tau_i(h) \\
&= \mu_0^*(g,h)(\mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h))^{-1}\mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h)(D \otimes D')(g)\tau_i(h) \\
&= \mu_0^*(g,h)(\mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h))^{-1}\tau_i(h) \cdot \\
&\quad\ (\mu_1^*(g,h)D(g)) \otimes (\mu_2^*(g,h)D'(g)) \\
&= \mu_0^*(g,h)(\mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h))^{-1}\tau_i(h) \cdot (\hat{D} \otimes \hat{D}')(h)
\end{aligned}$$

Da $\tau_i \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ ist und $\widehat{D \otimes D}'$ sowie $\hat{D} \otimes \hat{D}'$ nach Bemerkung 3.9 $\mathbb{C}H$-Darstellungen sind, ist die Abbildung

$$\alpha : H \to \mathbb{C}^*, h \mapsto \mu_0^*(g,h) \cdot (\mu_1^*(g,h) \cdot \mu_2^*(g,h))^{-1} \text{ mit } (g,h) \in L$$

nach Bemerkung 3.8 wohldefiniert und ein Homomorphismus. Somit ist $\widehat{D \otimes D}' \cdot \tau_i = \alpha \cdot \hat{D} \otimes \hat{D}'$ eine tensor-zerlegbare Matrixdarstellung.

Es seien nun umgekehrt $\dot{D}$ und $\dot{D}'$ zwei irreduzible $\mathbb{C}H$-Darstellungen, so dass $\dot{D} \otimes \dot{D}'$ irreduzibel ist.

Nach Folgerung 3.13 existieren $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $k, l \in \{1, \ldots, |Y/Z|\}$ mit

$$\dot{D}(h) = \mu^*(\lambda(D_i))(g,h)D_i(g)\tau_k(h)$$

und

$$\dot{D}'(h) = \mu^*(\lambda(D_j))(g,h)D_j(g)\tau_l(h)$$

für $(g,h) \in L$. Insbesondere gilt

$$(\dot{D} \otimes \dot{D}')(h) = \mu^*(\lambda(D_i))(g,h) \cdot \mu^*(\lambda(D_j))(g,h) \cdot \tau_k(h) \cdot \tau_l(h) \cdot (D_i \otimes D_j)(g)$$

für $(g, h) \in L$.

Es seien $\mu_1^* := \mu^*(\lambda(D_i))$ und $\mu_2^* := \mu^*(\lambda(D_j))$. Aufgrund der Irreduzibilität von $\dot{D} \otimes \dot{D}'$ und der Folgerung 3.13 existieren $\tau \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ und eine irreduzible $\mathbb{C}H$-Darstellung D mit $\mu_0^* := \mu^*(\lambda(D))$ und

$$\mu_0^*(g,h)\tau(h)D(g) = (\dot{D} \otimes \dot{D}')(h) = \mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h)\tau_k(h)\tau_l(h)(D_i \otimes D_j)(g)$$

bzw.

$$D(g) = \mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h)((\mu_0^*)(g,h))^{-1}(g,h)\tau_k(h)\tau_l(h)(\tau(h))^{-1} \cdot (D_i \otimes D_j)(g)$$

für $(g, h) \in L$. Da sowohl D als auch $D_i \otimes D_j$ Matrixdarstellungen sind, ist die folgende Abbildung ein Homomorphismus

$$\alpha : G \to \mathbb{C}^*, g \mapsto \mu_1^*(g,h)\mu_2^*(g,h)(\mu_0^*(g,h))^{-1}\tau_k(h)\tau_l(h)(\tau(h))^{-1},$$

wobei $h \in H$ so gewählt wird, dass $(g, h) \in L$ ist. Also ist $\alpha \cdot D_i$ eine irreduzible Matrixdarstellung und $D = (\alpha \cdot D_i) \otimes D_j$ eine tensor-zerlegbare Matrixdarstellung. Dementsprechend ist $\dot{D} \otimes \dot{D}'$ Element der Menge $\{\hat{D}_i\tau_j \mid i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}, j \in \{1, \dots, |Y/Z|\}\}$. Es folgt die Behauptung. □

3.15 Lemma:

Es sei $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ ein trivial tensor-zerlegbarer Charakter. Weiter sei N ein Normalteiler von G mit $\chi\downarrow_N^G = e\vartheta$, wobei $e \in \mathbb{N}_{>1}$, $\vartheta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(N)$ und $\vartheta(1) > 1$ ist. Dann existiert ein echter Normalteiler $\tilde{N}$ von G mit $Z(G)N \subseteq \tilde{N}$ und $\chi\downarrow_{\tilde{N}}^G = e\tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\tilde{N})$ und $\tilde{\varphi}\downarrow_N = \vartheta$.

Beweis: Es sei $\tilde{N} := NZ(G)$ und ω_χ der zentrale Charakter von χ. Dann lässt sich jedes Element $\tilde{n}$ von $\tilde{N}$ schreiben als $\tilde{n} = nz$ mit $n \in N$, $z \in Z(G)$ und man hat $\chi(\tilde{n}) = \omega_\chi(z)\chi(n)$. Also gilt $\chi\downarrow_{\tilde{N}}^G = e\tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\tilde{N})$. Insbesondere ist $\tilde{N}$ ein echter Normalteiler von G. □

3.16 Satz:

Die Notation entspreche jener aus Satz 3.14. Es seien $i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ und $j \in \{1, \dots, |Y/Z|\}$.

Genau dann ist D_i trivial tensor-zerlegbar, wenn $\hat{D}_i\tau_j$ trivial tensor-zerlegbar ist.
Beweis: Es seien $D := D_i$, $\dot{D} := \hat{D}_i\tau_j$, χ der zu D gehörige Charakter und $\lambda := \omega_\chi\downarrow_Z$.

„$\Rightarrow$": Es sei N ein echter Normalteiler von G mit $\chi\downarrow_N^G = e\vartheta$, wobei $e > 1$, $\vartheta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(N)$ und $\vartheta(1) > 1$ ist. Nach Lemma 3.15 kann man ohne Einschränkung $Z(G) \subseteq N$ annehmen.

Da G und H isoklin zueinander sind, existiert ein $M \triangleleft H$ mit $Y \leq M$ und $N/Z \cong M/Y$. Es gilt

$$\dot{D}(m) = \mu^*(\lambda(D))(n,m)\tau_j(m)D(n)$$

für alle $(n,m) \in (N \times M) \cap L$. Nun kann man ohne Einschränkung annehmen, dass

$$D(n) = \mathrm{Diag}(\underbrace{D_1(n), \ldots, D_1(n)}_{e \text{ mal}})$$

ist, wobei $D_1 : G \to \mathrm{GL}_{n/e}(\mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung ist. Also hat man

$$\dot{D}(m) = \mathrm{Diag}(\mu^*(\lambda(D))(n,m)\tau_j(m)D_1(n), \ldots, \mu^*(\lambda(D))(n,m)\tau_j(m)D_1(n))$$

für $(n,m) \in (N \times M) \cap L$ und somit ist $\dot{D}$ trivial tensor-zerlegbar.

„$\Leftarrow$": Analog zu oben existieren $Z \subseteq N \triangleleft G$, $Y \subseteq M \triangleleft H$ mit $N/Z \cong M/Y$, $e \in \mathbb{N}_{>1}$ und eine Matrixdarstellung $D_2 : H \to \mathrm{GL}_{n/e}(\mathbb{C})$, so dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass $\dot{D}(m) = \mathrm{Diag}(\underbrace{D_2(m), \ldots, D_2(m)}_{e \text{ mal}})$ für $(n,m) \in (N \times M) \cap L$ gilt.

Also ist

$$\tau_j(m)\mu^*(\lambda(D))(n,m)D(n) = \dot{D}(m) = \mathrm{Diag}(D_2(m), \ldots, D_2(m))$$

und folglich

$$\begin{aligned} D(n) &= \mathrm{Diag}((\tau_j(m) \cdot \mu^*(\lambda(D))(n,m))^{-1} \cdot D_2(m), \ldots, \\ &\qquad (\tau_j(m) \cdot \mu^*(\lambda(D))(n,m))^{-1} \cdot D_2(m)) \end{aligned}$$

für alle $(n,m) \in (N \times M) \cap L$. Also ist D trivial tensor-zerlegbar. $\square$

Mit Satz 3.14 folgt damit direkt die nächste Bemerkung.

3.17 Bemerkung:

Genau dann sind alle tensor-zerlegbaren Charaktere von G trivial tensor-zerlegbar, wenn alle tensor-zerlegbaren Charaktere von H trivial tensor-zerlegbar sind.

Liste der Isoklinieklassen von p-Gruppen mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ mit Ordnung $\leq p^6$ (nach Rodney James)[9]

3.18 Anmerkung:

Wir geben zunächst eine Anmerkung zur Tabelle auf Seite 45, die wir verwenden werden.

Die Isoklinieklassen der Ordnung p^6 werden mit ϕ_i bezeichnet, wobei $i \in \{1, \ldots, 43\}$ ist. Die Isoklinieklasse ϕ_1 ist jene, welche die triviale Gruppe als Vertreter hat. Weiter werden die Isomorphieklassen in den Isoklinieklassen mit $\phi_s\,(m_1, m_2, \ldots, m_r)\,x_t$ bezeichnet, wobei $r, s, t, m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r$ und x ein Buchstabe ist. Was die Notation im Einzelnen bedeutet, ist für unsere Zwecke uninteressant. Es ist vollkommen ausreichend zu wissen, dass die Guppen in der Isomorphieklasse $\phi_s\,(m_1, m_2, \ldots, m_r)\,x_t$ die Ordnung $p^{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r}$ haben und zur Isoklinieklasse ϕ_s gehören. Zudem ist die verwendete Notation eindeutig, insbesondere sind Isomorphieklassen mit verschiedenen Bezeichnungen unterschiedlich. Die vereinfachte Schreibweise $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ bezeichne jene Isomorphieklasse, welche die Gruppe $C_{p^{m_1}} \times C_{p^{m_2}} \times \ldots \times C_{p^{m_r}}$ enthält.

In der Tabelle auf Seite 45 werden bestimmte Eigenschaften der Isoklinieklassen aufgelistet. Die Zeilen beziehen sich jeweils auf die Isoklinieklassen, welche in der Spalte namens „Family" stehen. Anhand der Spalte „Rank"kann die Ordnung der Stammgruppen abgelesen werden. So ist p^{Rank} die Ordnung der Stammgruppen in der jeweiligen Isoklinieklasse. Die restlichen Bezeichnungen in der Tabelle verdeutlichen wir anhand der Zeile mit dem Eintrag ϕ_{11}. Es sei G eine Gruppe der Isoklinieklasse ϕ_{11}. Die Nilpotenzklasse von G ist der Spalte „Class" zu entnehmen; also hat G die Nilpotenzklasse 2. Dabei bezeichnet die Nilpotenzklasse jene minimale, natürliche Zahl n mit $G_{n+1} = \{1\}$, wobei $G_1 := G$ und $G_i := [G_{i-1}, G]$ für $i \geq 2$ ist. Die Spalten mit den Überschriften „r_i^*" mit $i \in \{0, 1, 2\}$ geben die Anzahl irreduzibler Charaktere vom Grad p^i der jeweiligen Stammgruppen der Isoklinieklassen an. So haben die Stammgruppen der Isoklinieklasse ϕ_{11} jeweils p^3 lineare Charaktere, $p^4 - p$ irreduzible Charaktere vom Grad p und keine irreduziblen Charaktere vom Grad p^2. Im Folgenden sei $v \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, welche modulo p kein Quadrat ist.

[9] [4]

Family	Rank	Class	$G/Z(G)$	G_2	G_3	G_4	G_5	r_0^*	r_1^*	r_2^*
ϕ_2	3	2	(11)	(1)				p^2	$p-1$	0
ϕ_3	4	3	$\phi_2\left(1^3\right)$	(11)	(1)			p^2	p^2-1	0
ϕ_4	5	2	(111)	(11)				p^3	p^3-p	0
ϕ_5	5	2	$\left(1^4\right)$	(1)				p^4	0	$p-1$
ϕ_6	5	3	$\phi_2\left(1^3\right)$	(111)	(11)			p^2	p^3-1	0
ϕ_7	5	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(11)	(1)			p^3	p^2-p	$p-1$
ϕ_8	5	3	$\phi_2(22)$	(2)	(1)			p^3	p^2-p	$p-1$
ϕ_9	5	4	$\phi_3\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)		p^2	p^3-1	0
ϕ_{10}	5	4	$\phi_3\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)		p^2	p^2-1	$p-1$
ϕ_{11}	6	2	(111)	(111)				p^3	p^4-p	0
ϕ_{12}	6	2	$\left(1^4\right)$	(11)				p^4	$2p^3-2p^2$	p^2-2p+1
ϕ_{13}	6	2	$\left(1^4\right)$	(11)				p^4	p^3-p^2	p^2-p
ϕ_{14}	6	2	(22)	(2)				p^4	p^3-p^2	p^2-p
ϕ_{15}	6	2	$\left(1^4\right)$	(11)				p^4	0	p^2-1
ϕ_{16}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(1)			p^3	p^4-p	0
ϕ_{17}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(1)			p^3	$2p^3-p^2-p$	p^2-2p+1
ϕ_{18}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(1)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{19}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(11)			p^3	$2p^3-p^2-p$	p^2-2p+1
ϕ_{20}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(11)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{21}	6	3	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(11)			p^3	p^2-p	p^2-1
ϕ_{22}	6	3	$\phi_2\left(1^5\right)$	(11)	(1)			p^4	p^3-p^2	p^2-p
ϕ_{23}	6	4	$\phi_3\left(1^4\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(1)		p^2	$2p^3-p^2-1$	p^2-2p+1
ϕ_{24}	6	4	$\phi_3\left(1^5\right)$	(111)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{25}	6	4	$\phi_3\,(221)\,b_1$	(21)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{26}	6	4	$\phi_3\,(221)\,b_v$	(21)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{27}	6	4	$\phi_3\left(1^5\right)$	(111)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{28}	6	4	$\phi_3\,(221)\,b_1$	(21)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{29}	6	4	$\phi_3\,(221)\,b_v$	(21)	(11)	(1)		p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{30}	6	4	$\phi_7\left(1^5\right)$	(111)	(11)	(1)		p^3	p^2-p	p^2-1
ϕ_{31}	6	3	$\phi_4\left(1^5\right)$	(111)	(1)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{32}	6	3	$\phi_4\left(1^5\right)$	(111)	(1)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{33}	6	3	$\phi_4\left(1^5\right)$	(111)	(1)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{34}	6	3	$\phi_4(221)b$	(21)	(1)			p^3	p^3-p	p^2-p
ϕ_{35}	6	5	$\phi_9\left(1^5\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)	p^2	p^4-1	0
ϕ_{36}	6	5	$\phi_9\left(1^5\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)	p^2	p^3-1	p^2-p
ϕ_{37}	6	5	$\phi_9\left(1^5\right)$	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)	p^2	p^3-1	p^2-p
ϕ_{38}	6	5	$\phi_{10}\left(1^5\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)	p^2	p^2-1	p^2-1
ϕ_{39}	6	5	$\phi_{10}\left(1^5\right)$	$\phi_2\left(1^4\right)$	(111)	(11)	(1)	p^2	p^2-1	p^2-1
ϕ_{40}	6	4	$\phi_6\left(1^5\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(1)		p^2	p^3-1	p^2-p
ϕ_{41}	6	4	$\phi_6\left(1^5\right)$	$\left(1^4\right)$	(111)	(1)		p^2	p^3-1	p^2-p
ϕ_{42}	6	4	$\phi_6\,(221)\,b_{1/2(p-1)}$	(211)	(111)	(1)		p^2	p^3-1	p^2-p
ϕ_{43}	6	4	$\phi_6(221)d_0$	(211)	(111)	(1)		p^2	p^3-1	p^2-p

3.19 Satz:

Eine Gruppe G der Ordnung p^6 mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ hat genau dann einen tensor-zerlegbaren Charakter, wenn die Isoklinieklasse von G in $\{\phi_i \mid i = 12, 17, 19 \text{ oder } 23\}$ liegt. Ein direktes Produkt zweier nichtabelscher Gruppen der Ordnung p^3 ist ein Vertreter der Isoklinieklasse ϕ_{12}. Die von D. Ritter konstruierte Gruppe liegt in der Isoklinieklasse ϕ_{23}.

Beweis:

Falls G einen tensor-zerlegbaren Charakter besitzt, gilt $Z(G) \cong C_p \times C_p$ und die tensor-zerlegbaren Charaktere sind gemäß der Diplomarbeit von D. Ritter[10] vom Grad p^2. Im weiteren Verlauf verwenden wir diese Tatsache und die Folgerungen 1.13 sowie 3.14.

Zunächst geben wir noch eine Anmerkung zu den Präsentationen aus der Arbeit von Rodney James[11] an: Falls keine Relation $[\alpha, \beta]$ angeführt ist, wird implizit $[\alpha, \beta] = 1$ angenommen.

1. Fall: $\phi_i, \quad i \in \{2, 3, \ldots, 10\}$.

Der Fall, dass die Isoklinieklasse von G ein ϕ_i mit $i \in \{2, 3, \ldots, 10\}$ ist, kann nicht auftreten, denn gemäß der Diplomarbeit von D. Ritter existiert keine p-Gruppe der Ordnung $\leq p^5$ mit einem tensor-zerlegbaren $\mathbb{C}$-Charakter[12].

2.Fall: ϕ_{11}.

Wegen $G' = G_2 \cong C_p \times C_p \times C_p$ und $\{1\} = [G_2, G]$ hat man $C_p \times C_p \times C_p \cong G' \subseteq Z(G)$ und somit ist das Zentrum von G nicht isomorph zu $C_p \times C_p$.

3. Fall: ϕ_{14}.

Analog wie im obigen Fall gilt $C_{p^2} \cong G' \subseteq Z(G)$ und entsprechend ist $Z(G) \ncong C_p \times C_p$.

4. Fall: ϕ_{16}.

Es gilt $r_2^* = 0 = |\{\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \mid \varphi(1) = p^2\}|$.

[10] [1], vgl. Theorem 3.2.4
[11] [4], s.S.614
[12] [1], vgl. Abschnitt 3.1

5. Fall: $\phi_i, \quad i \in \{22, 24, 25, \ldots, 43\}$.

Man hat $|G/Z(G)| = p^5$ und somit ist $|Z(G)| = p \neq p^2$.

6. Fall: ϕ_{12}.

Es sei $G := \phi_{12}(2211)b = \phi_2(21) \times \phi_2(21)$. Da G das Produkt zweier nichtabelscher Untergruppen ist, besitzt G einen tensor-zerlegbaren Charakter.

7. Fall: ϕ_{13}.

Es sei

$$G := \phi_{13}(2211)a = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2 \quad | \quad \begin{array}{l} [\alpha_1, \alpha_{i+1}] = \beta_i, [\alpha_2, \alpha_4] = \alpha_2^p = \beta_2, \\ \alpha_1^p = \beta_1, \alpha_3^p = \alpha_4^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1.2) \rangle. \end{array}$$

Es ist $G' = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle = Z(G)$.

Falls G einen tensor-zerlegbaren Charakter besitzt, dann existiert nach Folgerung 1.13 ein abelscher Normalteiler N der Ordnung p^4. Dabei ist $N = U \cap V$ gemäß der Notation von Folgerung 1.13. Wegen $|G/N| = p^2$ ist $Z(G) = G' \leq N$. Also existieren $\delta_1, \delta_2 \in G \setminus Z(G)$ mit $N = \langle \delta_1, \delta_2, Z(G) \rangle$ und $[\delta_1, \delta_2] = 1$. Es seien $i_1, \ldots, i_4, j_1, \ldots, j_4 \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta_1 G' = \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \alpha_3^{i_3} \alpha_4^{i_4} G'$$

und

$$\delta_2 G' = \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \alpha_3^{j_3} \alpha_4^{j_4} G'.$$

Da G/G' abelsch ist, kann man ohne Einschränkung

$$\min\{k \in \{1,2,3,4\} \mid i_k \neq 0\} < \min\{k \in \{1,2,3,4\} \mid j_k \neq 0\}$$

annehmen. Insbesondere ist $j_1 = 0$. Wegen $G' = Z(G) \subseteq N$ gilt ebenfalls ohne Einschränkung $\delta_1 = \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \alpha_3^{i_3} \alpha_4^{i_4}$ und $\delta_2 = \alpha_2^{j_2} \alpha_3^{j_3} \alpha_4^{j_4}$.

Wir wollen nun $[\delta_1, \delta_2]$ berechnen. Wegen $[G, G] = G' \subseteq Z(G)$ erhält man mit Lemma 1.5 eine Abbildung

$$\begin{array}{rll} \tilde{\eta}: & G \times G & \to G' = Z(G) \\ & (g, g') & \mapsto [g, g'] \end{array}$$

mit der Eigenschaft, dass $\tilde{\eta}(g,\cdot)$ und $\tilde{\eta}(\cdot,g)$ für alle $g\in G$ Gruppenhomomorphismen sind. Wegen $[gz,g'z']=[g,g']$ für alle $g,g'\in G$ und $z,z'\in Z(G)$ sowie $G'=Z(G)$ ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \eta: \quad G/G'\times G/G' &\to G'=Z(G)\\ (gG',g'G') &\mapsto \tilde{\eta}(g,g')=[g,g']. \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass $\eta(gG',\cdot)$ und $\eta(\cdot,gG')$ ebenfalls für alle $g\in G$ Gruppenhomomorphismen sind. Desweiteren sind die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \eta_2: \quad G/G' &\to \mathbb{F}_p^{4\times 1}\\ \alpha_i &\mapsto e_i \text{ für } i\in\{1,\dots,4\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta_3: \quad \mathbb{F}_p^{2\times 1} &\to Z(G)\\ \tilde{e}_i &\mapsto \beta_i \text{ für } i\in\{1,2\} \end{aligned}$$

Isomorphismen, wobei $e_1,\dots,e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_p^{4\times 1}$ und $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_p^{2\times 1}$ bezeichne. Weiter seien

$$\begin{aligned} \eta_2\times\eta_2: \quad G/G'\times G/G' &\to \mathbb{F}_p^{4\times 1}\times\mathbb{F}_p^{4\times 1},\\ (g_1G',g_2G') &\mapsto (\eta_2(g_1G'),\eta_2(g_2G')) \end{aligned}$$

und $\dot{\eta}:\mathbb{F}_p^{4\times 1}\times\mathbb{F}_p^{4\times 1}\to\mathbb{F}_p^{2\times 1}$ die Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G/G'\times G/G' \arrow[r, "\eta_2\times\eta_2"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{F}_p^{4\times 1}\times\mathbb{F}_p^{4\times 1} \arrow[d, "\dot{\eta}"] \\ Z(G) & \mathbb{F}_p^{2\times 1} \arrow[l, "\eta_3"] \end{tikzcd}$$

Da $\dot{\eta}:\mathbb{F}_p^{4\times 1}\times\mathbb{F}_p^{4\times 1}\to\mathbb{F}_p^{2\times 1}$ eine bilineare Abbildung ist, existieren Matrizen $A_i\in\mathbb{F}_p^{2\times 4}$ für $i\in\{1,\dots,4\}$ mit

$$\dot{\eta}(v,w)=(v^{tr}\otimes E_2)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}w$$

für alle $v \in \mathbb{F}_p^{4\times 1}$ und $w \in \mathbb{F}_p^{4\times 1}$. Dabei sind A_i die Matrizen zu den linearen Abbildungen $\dot\eta(e_i,\cdot) : \mathbb{F}_p^{4\times 1} \to \mathbb{F}_p^{2\times 1}, v \mapsto \dot\eta(e_i, v)$ für $i \in \{1,\ldots,4\}$. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

stellt sozusagen eine verallgemeinerte Gram-Matrix dar. Mithilfe der Relationen der Gruppenpräsentation erhält man

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

und

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2] &= \eta(\delta_1 G', \delta_2 G') = \eta_3 \circ \dot\eta \left(\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \eta_3 \left(\left(\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \otimes E_2 \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \eta_3 \left((i_1 A_1 + \ldots + i_4 A_4) \begin{pmatrix} \cdot \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \right) = \eta_3 \left(\begin{pmatrix} -i_2 & i_1 & \cdot & \cdot \\ -i_3 & -i_4 & i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \beta_1^{i_1 j_2} \beta_2^{-i_4 j_2 + i_1 j_3 + i_2 j_4}.
\end{aligned}$$

Falls $i_1 \not\equiv_p 0$ ist, gilt wegen $[\delta_1, \delta_2] = 1$ somit $j_2 \equiv_p 0$. Ist nun $i_1 \equiv_p 0$, so gilt ebenfalls $j_2 \equiv_p 0$, da $\min\{k \in \{1,2,3,4\} \mid i_k \neq 0\} < \min\{k \in \{1,2,3,4\} \mid j_k \neq 0\}$ ist. Also sind

$$j_2 \equiv_p 0$$

und $[\delta_1, \delta_2] = \beta_2^{i_1 j_3 + i_2 j_4}$. Folglich gilt

$$-i_1 j_3 \equiv_p i_2 j_4. \tag{3.0.3}$$

Desweiteren suchen wir nach Folgerung 1.13 zwei Elemente mit $\delta_3, \delta_4 \in G$, so dass $\{1\} \neq U', V'$ und $U' \cap V' = \{1\}$ für $U := \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3, Z(G) \rangle$ und $V := \langle \delta_1, \delta_2, \delta_4, Z(G) \rangle$ gilt. Weiter gilt $U' = \langle [\delta_3, \delta_1], [\delta_3, \delta_2] \rangle$ und $V' = \langle [\delta_4, \delta_1], [\delta_4, \delta_2] \rangle$ nach Lemma 1.5 wegen $G' = Z(G)$. Insbesondere gilt

$$\{1\} \neq \langle [\delta_3, \delta_1], [\delta_3, \delta_2] \rangle, \langle [\delta_4, \delta_1], [\delta_4, \delta_2] \rangle \tag{3.0.4}$$

und

$$\langle [\delta_3, \delta_1], [\delta_3, \delta_2] \rangle \cap \langle [\delta_4, \delta_1], [\delta_4, \delta_2] \rangle = \{1\}. \tag{3.0.5}$$

Wir nehmen an, es existieren zwei Elemente δ_3 und δ_4 mit obigen Eigenschaften. Analog zu oben existieren ohne Einschränkung $k_1, \ldots, k_4, l_1, \ldots, l_4 \in \mathbb{N}$ mit $\delta_3 = \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\alpha_3^{k_3}\alpha_4^{k_4}$ und $\delta_4 = \alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2}\alpha_3^{l_3}\alpha_4^{l_4}$.

Weiter folgert man analog zu oben, dass

$$\begin{aligned} [\delta_3, \delta_1] &= \eta_3 \left(\begin{pmatrix} -k_2 & k_1 & \cdot & \cdot \\ -k_3 & -k_4 & k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \eta_3 \begin{pmatrix} -k_2 i_1 + k_1 i_2 \\ * \end{pmatrix} = \beta_1^{-k_2 i_1 + k_1 i_2} \beta_2^{*} \end{aligned}$$

und $[\delta_3, \delta_2] = [\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\alpha_3^{k_3}\alpha_4^{k_4}, \alpha_3^{j_3}\alpha_4^{j_4}] = \beta_2^{k_1 j_3 + k_2 j_4}$ sind. Folglich sind ebenfalls $[\delta_4, \delta_1] = \beta_1^{-l_2 i_1 + l_1 i_2} \cdot \beta_2^{*}$ und $[\delta_4, \delta_2] = \beta_2^{l_1 j_3 + l_2 j_4}$.

Falls nun $[\delta_3, \delta_1] = [\delta_4, \delta_1] = 1$ ist, gilt $\langle [\delta_3, \delta_1], [\delta_3, \delta_2] \rangle, \langle [\delta_4, \delta_1], [\delta_4, \delta_2] \rangle \in \{\{1\}, \langle \beta_2 \rangle\}$. Mit 3.0.4 ergibt sich somit ein Widerspruch zu 3.0.5. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $-k_2 i_1 + k_1 i_2 \not\equiv_p 0$ ist. Da $\delta_2 \neq 1$ ist, gilt $j_3 \not\equiv_p 0$ oder $j_4 \not\equiv_p 0$. Angenommen es ist $j_4 \not\equiv_p 0$, dann hat man

$$(-k_2 i_1 + k_1 i_2) \cdot j_4 \equiv_p k_1 i_2 j_4 - k_2 j_4 i_1 \overset{3.0.3}{\equiv_p} -k_1 i_1 j_3 - k_2 j_4 i_1 \equiv_p -(k_1 j_3 + k_2 j_4) i_1.$$

Somit ist $k_1 j_3 + k_2 j_4 \not\equiv_p 0$. Es sei nun $j_3 \not\equiv_p 0$. Es gilt

$$(-k_2 i_1 + k_1 i_2) \cdot j_3 \equiv_p k_1 j_3 i_2 - k_2 i_1 j_3 \overset{3.0.3}{\equiv_p} k_1 j_3 i_2 + k_2 j_4 i_2 \equiv_p (k_1 j_3 + k_2 j_4) i_2.$$

Damit gilt in beiden Fällen $k_1 j_3 + k_2 j_4 \not\equiv_p 0$.

Dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \langle [\delta_3, \delta_1], [\delta_3, \delta_2] \rangle &= \langle \beta_1^{-k_2 i_1 + k_1 i_2} \cdot \beta_2^{*}, \beta_2^{k_1 j_3 + k_2 j_4} \rangle = \langle \beta_1^{-k_2 i_1 + k_1 i_2} \cdot \beta_2^{*}, \beta_2 \rangle \\ &= \langle \beta_1^{-k_2 i_1 + k_1 i_2}, \beta_2 \rangle = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle = G' = Z(G) \end{aligned}$$

und damit gilt $\langle[\delta_3,\delta_2],\,[\delta_3,\delta_2]\rangle \cap \langle[\delta_4,\delta_1],\,[\delta_4,\delta_2]\rangle \neq \{1\}$, falls $\langle[\delta_4,\delta_1],[\delta_4,\delta_2]\rangle \neq \{1\}$ ist. Also existieren keine Elemente δ_3 und δ_4 mit den gewünschten Eigenschaften. Es folgt die Behauptung.

8. Fall: ϕ_{15}.

Analog wie im obigen Fall zeigt man, dass keine Gruppe in der Isoklinieklasse mit einem tensor-zerlegbaren Charakter existiert.

9. Fall: ϕ_{17}.

Es sei $G := \phi_{17}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma \mid [\alpha_i, \alpha] = \alpha_{i+1}, [\beta, \alpha_1] = \beta^p = \gamma, \alpha^p = \alpha_3, \alpha_1^p = \alpha_{i+1}^p = \gamma^p = 1 \ (i = 1, 2)\rangle$. Damit ist $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle$ und $G/G' = \langle \alpha G', \alpha_1 G', \beta G'\rangle \cong (C_p)^3$. Mit $V := \langle \alpha, \beta\rangle\, G'$ und $U := \langle \alpha_1, \beta\rangle\, G'$ hat man $(\langle\beta\rangle G')' = \{1\}$, $[\alpha, \langle\beta\rangle G'] = \langle\alpha_3\rangle$ und $[\alpha_1, \langle\beta\rangle G'] = \langle\gamma\rangle$. Folglich sind $V' = \langle\alpha_3\rangle$, $U' = \langle\gamma\rangle \subseteq Z(G)$ und $U' \cap V' = \{1\}$. Desweiteren ist $\langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle \subseteq Z(U) \neq Z(G) = \langle\alpha_3, \gamma\rangle$. Somit besitzen die Gruppen der Isoklinieklasse nach Folgerung 1.13 einen tensor-zerlegbaren Charakter.

10. Fall: ϕ_{18}.

Es sei $G := \phi_{18}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma \mid [\alpha_i, \alpha] = \alpha_{i+1}, [\alpha_1, \beta] = \alpha^p = \alpha_3, [\alpha, \beta] = \beta^p = \gamma, \alpha_1^{(p)} = \alpha_{i+1}^p = \gamma^p = 1 \ (i = 1, 2)\rangle$ mit $\alpha_1^{(p)} := \begin{cases} \alpha_1^3\alpha_3, & p = 3 \\ \alpha_1^5\gamma^2, & p = 5 \\ \alpha_1^p, & p > 5. \end{cases}$

Dann sind $Z(G) = \langle\alpha_3, \gamma\rangle$, $G' = \langle\alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle$ und $[G', G] = \langle\alpha_3\rangle \cong C_p$.

Es seien U und V zwei maximale Untergruppen von G mit $U', V' \neq \{1\}$ und $U' \cap V' = \{1\}$. Da U und V maximal sind, gilt $G' \subseteq U, V$. Angenommen es sind $U \nsubseteq C_G(\alpha_2)$ und $V \nsubseteq C_G(\alpha_2)$. Dann gilt $[U, G'] = [U, \alpha_2] \neq \{1\}$ und $[U, G'] \subseteq [G, G'] = \langle\alpha_3\rangle \cong C_p$. Damit erhält man $[U, \alpha_2] = \langle\alpha_3\rangle$ und analog $[V, \alpha_2] = \langle\alpha_3\rangle$. Also ist $\alpha_3 \in [U, \alpha_2] \cap [V, \alpha_2] \subseteq U' \cap V'$.

Da V maximal und $\alpha_2 \notin Z(G)$ ist, hat man somit ohne Einschränkung $V = C_G(\alpha_2) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma, \beta\rangle$. Allerdings ist somit α_3 Element von V' und ebenfalls von $U' \cap V'$, da $U \nsubseteq C_G(\alpha_2)$ ist. Also existieren keine maximalen Normalteiler U und V mit den gewünschten Eigenschaften. Damit besitzt G keinen tensor-zerlegbaren $\mathbb{C}$-Charakter.

11. Fall: ϕ_{19}.

Es sei

$$G := \phi_{19}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_1, \alpha_2] = \beta, [\beta, \alpha_i] = \alpha_i^p = \beta_i, [\alpha, \alpha_1] = \beta_1, \alpha^p = \beta^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1, 2) \rangle.$$

Dann ist $G' = \langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle$ und $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Es seien $V := \langle \alpha_1, \alpha \rangle G'$ und $U := \langle \alpha_2, \alpha \rangle G'$. Wegen $(\langle \alpha \rangle G')' = \{1\}$ hat man $\{1\} \neq V' = [\alpha_1, \langle \alpha \rangle G'] = \langle \beta_1 \rangle$ und $\{1\} \neq U' = [\alpha_2, \langle \alpha \rangle G'] = \langle \beta_2 \rangle$. Zudem ist $U' = \langle \beta_2 \rangle \subseteq Z(G)$ und $\alpha \in Z(U) \setminus Z(G)$. Mit Folgerung 1.13 erhält man die Behauptung.

12. Fall: ϕ_{20}.

Es sei $G := \phi_{20}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_1, \alpha_2] = \beta, [\beta, \alpha_i] = \beta_i, [\alpha, \alpha_1] = \alpha_2^p \beta_1^{-\binom{p}{3}} = \beta_2, \alpha_1^p = \beta_1, \alpha^p = \beta^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1, 2) \rangle$. Dann ist $G' = \langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle$ und $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Wegen $[\beta, G] \subseteq Z(G)$ folgt $[\beta, \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \alpha^{k_3}] = [\beta, \alpha_1]^{k_1} \cdot [\beta, \alpha_2]^{k_2} \cdot [\beta, \alpha]^{k_3} = \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2}$ für $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ mit Lemma 1.5.

Wegen $\beta \in G'$ ist somit $H := \langle \alpha \rangle G'$ der einzige abelsche Normalteiler von G der Ordnung p^4. Angenommen es existieren zwei maximale Untergruppen U und V von G mit $V' \neq \{1\}$, $U' \neq \{1\}$ und $U' \cap V' = \{1\}$. Dann ist $U \cap V = H$, da $U \cap V$ abelsch von der Ordnung p^4 ist. Es existieren $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ mit $U = \langle \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \rangle H$ und $V = \langle \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \rangle H$. Weiter sind $[\alpha_1, \alpha]$, $[\alpha_1, \beta]$, $[\alpha_2, \alpha]$ und $[\alpha_2, \beta] \in Z(G)$. Damit ist $[\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, H] \leq Z(G)$. Es folgt wiederum mit Lemma 1.5, dass

$$\begin{aligned} [\alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2}, \alpha^a \beta^b] &= [\alpha_1, \alpha]^{a_1 a} \cdot [\alpha_1, \beta]^{a_1 b} \cdot [\alpha_2, \alpha]^{a_2 a} \cdot [\alpha_2, \beta]^{a_2 b} \\ &= \beta_2^{-a_1 a} \cdot \beta_1^{-a_1 b} \cdot \beta_2^{-a_2 b} \end{aligned}$$

für $a_1, a_2, a, b \in \mathbb{N}$ ist. Wegen $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ ist somit $U' = [\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2}, H] = \langle \beta_2^{k_1}, \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2} \rangle$ sowie $V' = [\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2}, H] = \langle \beta_2^{l_1}, \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \rangle$. Da $U' \neq \{1\}$, $V' \neq \{1\}$ und $U' \cap V' = \{1\}$ sind, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $k_1 \equiv_p 0$, $k_2 \not\equiv_p 0$ und $l_1 \not\equiv_p 0$ sind. Also hat man $V' = \langle \beta_2^{l_1}, \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \rangle = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Wegen $U' \subseteq \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ gilt $U' \cap V' \neq \{1\}$. Dies ist ein Widerspruch zu $U' \cap V' = \{1\}$ und es folgt die Behauptung.

13. Fall: ϕ_{21}.

Es sei $G := \phi_{21}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_1, \alpha_2] = \beta, [\beta, \alpha_i] = \beta_i, [\alpha, \alpha_1] = \alpha_2^p \beta_1^{\binom{p}{3}} = \beta_2, [\alpha, \alpha_2] = \beta_1^v, \alpha_1^p \beta_2^{-\binom{p}{3}} = \beta_1, \alpha^p = \beta^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1, 2) \rangle$. Dann ist $G' =$

$\langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle$ und $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Analog wie im Fall ϕ_{20} zeigt man, dass $\langle \alpha \rangle G'$ der einzige abelsche Normalteiler von G der Ordnung p^4 mit G' als Untergruppe ist und dass keine Untergruppen V und U mit den gewünschten Eigenschaften existieren.

14. Fall: ϕ_{23}.

Es sei $G := \phi_{23}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma \mid [\alpha_i, \alpha] = \alpha_{i+1}, [\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1^p = \gamma, \alpha^p = \alpha_4, \alpha_{i+1}^p = \gamma^p = 1 \ (i = 1, 2, 3) \rangle$. Dann ist $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma \rangle$ und $Z(G) = \langle \alpha_4, \gamma \rangle$.

Mit $V := \langle \alpha \rangle\, G'$ und $U := \langle \alpha_1 \rangle\, G'$ hat man $[G : U] = [G : V] = p$, $\{1\} \neq V' = \langle \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ und $\{1\} \neq U' = \langle \gamma \rangle$. Damit erhält man $U' \cap V' = \{1\}$ und $V' \nsubseteq Z(G)$. Es folgt die Behauptung mit Folgerung 1.13.

Die Isoklinieklasse ϕ_{23} ist die einzige Isoklinieklasse von $\{\phi_{12}, \phi_{17}, \phi_{19}, \phi_{23}\}$, in der die Kommutatorgruppen der Elemente die Ordnung p^4 besitzen. Somit liegt die von D. Ritter konstruierte Gruppe in ϕ_{23}.

$\square$

Kapitel 4

Charaktertafeln der Isoklinieklassen ϕ_{17} und ϕ_{19}

Im vorherigen Kapitel haben wir gezeigt, dass Elemente der Isoklinieklassen ϕ_{12}, ϕ_{17}, ϕ_{19} und ϕ_{23} die einzigen Gruppen der Ordnung p^6 für $p \in \mathbb{P} \setminus 2$ sind, welche einen tensor-zerlegbaren Charakter besitzen. Wir bestimmen im Folgenden die Charaktertafeln von jeweils einem gewählten Verteter dieser Isoklinieklassen. Anschließend prüfen wir, ob der tensor-zerlegbare Charakter auch nichttrivial tensor-zerlegbar ist.

Dabei werden wir die Isoklinieklassen ϕ_{12} und ϕ_{23} nicht betrachten, denn ϕ_{23} wurde bereits von D. Ritter behandelt und ϕ_{12} ist jene Isoklinieklasse, welche ein direktes Produkt zweier nichtabelscher Untergruppen besitzt.

Es seien $I := \{1, \ldots, p\}$ und $I^* := \{1, \ldots, p-1\}$.

$\underline{\phi_{17}}$:

Wir betrachten $G := \phi_{17}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma \mid [\alpha_i, \alpha] = \alpha_{i+1}, [\beta, \alpha_1] = \beta^p = \gamma, \alpha^p = \alpha_3, \alpha_1^p = \alpha_{i+1}^p = \gamma^p = 1 (i = 1, 2) \rangle$, $U := \langle \alpha, \beta, \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$ und $V := \langle \alpha_1, \beta, \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$.

Wir nehmen zunächst die Konjugiertenklassen von $\phi_{17}(2211)a$ aus Tabelle 4.1 als vorläufig an und beweisen als Erstes die Tabellen 4.3-4.5. Dann bestimmen wir alle irreduziblen Charaktere. Letzendlich beweisen wir die Korrektheit der angegebenen Konjugiertenklassen.

<u>Beweis der Tabellen 4.3-4.5:</u> Es sind $U' = \langle \alpha_3 \rangle$ und

$$U/U' = \langle \alpha U', \beta U', \alpha_2 U', \gamma U' \rangle = \langle \beta U' \rangle \times \langle \alpha U' \rangle \times \langle \alpha_2 U' \rangle \cong C_{p^2} \times C_p \times C_p.$$

Bezeichnung	Vertreter	Parameter	Länge	Anzahl
$q^0_{a_3,c}$	$\alpha_3^{a_3}\gamma^c$	$a_3, c \in I$	1	p^2
$q^1_{a_2,c}$	$\alpha_2^{a_2}\gamma^c$	$a_2 \in I^*, c \in I$	p	$p(p-1)$
q^2_{b,a_3}	$\beta^b\alpha_3^{a_3}$	$b \in I^*, a_3 \in I$	p	$p(p-1)$
$q^3_{a,b,c}$	$\alpha^a\beta^b\gamma^c$	$a \in I^*, b, c \in I$	p^2	$p^2(p-1)$
$q^4_{a_1,b,a_3}$	$\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3}$	$a_1 \in I^*, b, a_3 \in I$	p^2	$p^2(p-1)$
q^5_{b,a_2}	$\beta^b\alpha_2^{a_2}$	$b, a_2 \in I^*$	p^2	$(p-1)^2$
$q^6_{a,a_1,b}$	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\beta^b$	$a, a_1, b \in I^*$	p^3	$(p-1)^3$
q^7_{a,a_1}	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}$	$a, a_1 \in I^*$	p^3	$(p-1)^2$

mit $I := \{1, \ldots, p\}$, $I^* := \{1, \ldots, p-1\}$.

Tabelle 4.1 – Konjugiertenklassen von $\phi_{17}(2211)a$

Somit ist der Homomorphismus

$$\varphi_h^i : U \to \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} \alpha & \mapsto & \zeta^{ihp} \\ \beta & \mapsto & \zeta^i \\ \alpha_2 & \mapsto & \zeta^{ihp} \\ \alpha_3 & \mapsto & 1 \\ \gamma & \mapsto & \zeta^{ip} \end{pmatrix}$$

wohldefiniert, wobei ζ eine primitive p^2-Einheitswurzel, $i \in I^*$ und $h \in I$ sind. Weiter sind $V = \langle \alpha_1, \beta, \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$, $V' = \langle \gamma \rangle$ und $V/V' = \langle \alpha_1 V', \beta V', \alpha_2 V', \alpha_3 V' \rangle = \langle \alpha_1 V' \rangle \times \langle \beta V' \rangle \times \langle \alpha_2 V' \rangle \times \langle \alpha_3 V' \rangle \cong C_p \times C_p \times C_p \times C_p$. Also sind die Homomorphismen

$$\lambda^i : V \to \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mapsto & 1 \\ \beta & \mapsto & 1 \\ \alpha_2 & \mapsto & 1 \\ \alpha_3 & \mapsto & \psi^i \\ \gamma & \mapsto & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\kappa^i : V \to \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mapsto & 1 \\ \beta & \mapsto & 1 \\ \alpha_2 & \mapsto & \psi^i \\ \alpha_3 & \mapsto & 1 \\ \gamma & \mapsto & 1 \end{pmatrix}$$

wohldefiniert, wobei ψ eine primitive p-Einheitswurzel und $i \in I^*$ sind.

Nun gilt

(i) $\begin{array}{c|ccccc} & \alpha & \beta & \alpha_2 & \alpha_3 & \gamma \\ \hline (\varphi_h^i)^{\alpha_1^{-k}} & \zeta^{ihp-kihp} & \zeta^{i+kip} & \zeta^{ihp} & 1 & \zeta^{ip} \end{array}$,

(ii) $\begin{array}{c|ccccc} & \alpha_1 & \beta & \alpha_2 & \alpha_3 & \gamma \\ \hline (\lambda^i)^{\alpha^{-k}} & \psi^{\binom{k}{2}i} & 1 & \psi^{ki} & \psi^i & 1 \end{array}$ und

(iii) $\begin{array}{c|ccccc} & \alpha_1 & \beta & \alpha_2 & \alpha_3 & \gamma \\ \hline (\kappa^i)^{\alpha^{-k}} & \psi^k & 1 & \psi & 1 & 1 \end{array}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

zu (i): Es ist $\alpha^{\alpha_1} = \alpha\alpha_2^{-1}$, $\beta^{\alpha_1} = \beta^\gamma$ und α zentralisiert α_2, α_3 sowie γ. Daraus folgt die Behauptung durch Induktion über k.

zu (ii), (iii): Es ist $\alpha_1^\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2^\alpha = \alpha_2\alpha_3$ und α zentralisiert β, α_3 und γ. Daraus folgt die Behauptung durch Induktion über k.

Es seien

$$\nu_{k,l,m} : G \to \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} \alpha & \mapsto & \psi^k \\ \alpha_1 & \mapsto & \psi^l \\ \beta & \mapsto & \psi^m \\ \alpha_2 & \mapsto & 1 \\ \alpha_3 & \mapsto & 1 \\ \gamma & \mapsto & 1 \end{pmatrix}$$

für k, l und $m \in I$. Wegen $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$ und $G/G' = \langle \alpha G' \rangle \times \langle \alpha_1 G' \rangle \times \langle \beta G' \rangle \cong C_p^3$ sind $\nu_{k,l,m}$ wohldefiniert und es gilt

$$\{\nu_{k,l,m} \mid k, l, m \in I\} = \{\text{lineare Charaktere von } G\}.$$

Wir zeigen nun, dass die Charaktere $\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}$, $\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}$ und $\kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m}$ irreduzibel sind.

Da U sowie V maximale Untergruppen von G und φ_h^i, λ^i sowie κ^i nicht invariant unter G sind, folgt $T_G(\varphi_h^i) = U$ und $T_G(\lambda^i) = T_G(\kappa^i) = V$. Folglich sind die Charaktere $\varphi_h^i \uparrow_U^G$, $\lambda^i \uparrow_V^G$ sowie $\kappa^i \uparrow_V^G$ irreduzibel und somit ebenfalls $\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}$, $\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}$ und $\kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{k,0,0}$.

Die Werte für die Charaktere in der „vorläufigen" Charaktertafel 4.2 ergeben sich aus den Tabellen 4.3-4.5. Exemplarisch bestimmen wir $\varphi_h^i \uparrow_U^G (\alpha^a\beta^b\gamma^c)$ und $\lambda^i \uparrow_V^G (\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3})$ für $a, i, h, a_1 \in I^*$ und $c, b, a_3 \in I$.

1. Fall: $-ha+b \not\equiv_p 0$.

Man hat $\varphi_h^i \uparrow_U^G (\alpha^a\beta^b\gamma^c) = \sum_{k=0}^{p-1}(\varphi_h^i)^{\alpha_1^{-k}}(\alpha^a\beta^b\gamma^c) = \sum_{k=0}^{p-1}\zeta^{ihpa-kihpa}\zeta^{ib+kipb}\zeta^{ipc} = \zeta^{ihap+ib+ipc}\sum_{k=0}^{p-1}(\zeta^p)^{ki(-ha+b)} = \zeta^{iha+ib+ipc}\sum_{j=0}^{p-1}(\zeta^p)^j = 0$.

2. Fall: $-ha+b \equiv_p 0$.

Es ist $\varphi_h^i \uparrow_U^G (\alpha^a\beta^b\gamma^c) = \zeta^{ihpa+ib+ipc}\sum_{k=0}^{p-1}\underbrace{(\zeta^p)^{ki(-ha+b)}}_{1} = p\cdot\zeta^{ihpa+ib+ipc}$.

Desweiteren gilt $\lambda^i \uparrow_V^G (\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3}) = \sum_{k=0}^{p-1}(\lambda^i)^{\alpha^{-k}}(\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3}) = \sum_{k=0}^{p-1}\psi^{\binom{k}{2}ia_1}\psi^{ia_3} = \psi^{ia_3}\omega_{ia_1}$, wobei $\omega_w := \sum_{q=0}^{p-1}\psi^{w(q-1)q/2}$ für $w\in\mathbb{Z}$ ist.

Oben wurde bereits gezeigt, dass

$$A_0 := \{\nu_{k,l,m} \mid k,l,m \in I\} = \{\text{lineare Charaktere von } G\}$$

ist. Wir zeigen nun

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot\nu_{k,0,0} \mid i\in I^*, h,k\in I\} \cup \{\lambda^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l,m} \mid i\in I^*, l,m\in I\} \\ &\quad\ \cup\{\kappa^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{k,0,0} \mid i\in I^*, k\in I\} \\ &= \{\text{irreduzible Charaktere von } G \text{ vom Grad } p\}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A_2 &:= \{\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot\lambda^j \uparrow_V^G \mid i,j\in\{1,\dots,p-1\}\} \\ &= \{\text{irreduzible Charaktere von } G \text{ vom Grad } p^2\}, \end{aligned}$$

und somit ist $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = A_0\cup A_1\cup A_2$.

Dafür zeigen wir zunächst für $i,i',i''\in\{1,\dots,p-1\}$ und $h,k,k',l,l',m,m'\in\{1,\dots,p\}$, dass Folgendes gilt:

(i) $\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot\nu_{k,0,0} \neq \varphi_{h'}^{i'} \uparrow_U^G \cdot\nu_{k',0,0}$ für $(i,k,h)\neq(i',k',h')$,

(ii) $\lambda^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l,m} \neq \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l',m'}$ für $(i,l,m)\neq(i',l',m')$,

(iii) $\kappa^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,0,m} \neq \kappa^{i'} \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,0,m}$ für $(i,m)\neq(i',m')$,

(iv) $\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot\nu_{k,0,0} \neq \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l,m},\ \ \kappa^{i''} \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,0,m}$ und

(v) $\lambda^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l,m} \neq \kappa^{i'} \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,0,m'}$.

Entsprechend der Tabelle 4.2 ist

$$\omega_w := \sum_{q=0}^{p-1} \psi^{w(q-1)q/2}$$

für $w \in \mathbb{Z}$. Es sei nun $w \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. Dann ist $\omega_w = 2 + \sum_{i=1}^{p-1} |\{q \in \{1, \ldots, p-1\} \mid w(q-1)q/2 \equiv_p i\}| \cdot \psi^i = f(\psi)$ mit $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ und $\mathrm{grad}(f) \leq p-1$. Das Minimalpolynom von ψ ist das Kreisteilungspolynom $\nu := 1 + X + X^2 + \ldots + X^{p-1}$. Da f von geringerem oder gleichem Grad wie das Minimalpolynom ν und ungleich 0, ν ist, gilt $f(\psi) \neq 0$. Also ist $\omega_w \neq 0$.

Für $w \in p\mathbb{Z}$ gilt $\omega_w = p$. Zusammenfassend ist

$$\omega_w \neq 0 \tag{4.0.1}$$

für alle $w \in \mathbb{Z}$.

<u>zu (i):</u> Es sind

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\gamma) = p\zeta^{pi} \neq p\zeta^{pi'} = \varphi_{h'}^{i'} \uparrow_U^G \cdot \nu_{k',0,0}(\gamma)$$

für $i \neq i'$,

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\alpha_2) = p\zeta^{phi} \neq p\zeta^{ph'i'} = \varphi_{h'}^{i'} \uparrow_U^G \cdot \nu_{k',0,0}(\alpha_2)$$

für $h \neq h'$ und $i = i'$,

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\alpha\beta^h) \overset{-h+h\equiv_p 0}{=} p\zeta^{i(hp+h+pk)} \neq p\zeta^{i'(h'p+h'+pk')} = \varphi_{h'}^{i'} \uparrow_U^G \cdot \nu_{k',0,0}(\alpha\beta^{h'})$$

für $h = h' \in I^*$, $i = i'$ und $k \neq k'$ sowie

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\alpha) = p\psi^k \neq p\psi^{k'} = \varphi_{h'}^{i'} \uparrow_U^G \cdot \nu_{k',0,0}$$

für $h = h' = 0$, $i = i'$ und $k \neq k'$.

<u>zu (ii):</u> Es sind

$$\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}(\alpha_3) = p\psi^i \neq p\psi^{i'} = \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l',m'}(\alpha_3)$$

für $i \neq i'$,

$$\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}(\beta) = p\psi^m \neq p\psi^{m'} = \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l',m'}(\beta)$$

für $m \neq m'$ sowie nach 4.0.1

$$\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}(\alpha_1) = \omega_i \psi^l \neq \omega_{i'} \psi^{l'} \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l',m'}$$

für $i = i'$ und $l \neq l'$.

zu (iii): Es sind

$$\kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m}(\alpha_2) = p\psi^i \neq p\psi^{i'} = \kappa^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m'}(\alpha_2)$$

für $i \neq i'$ sowie

$$\kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m}(\beta) = p\psi^m \neq p\psi^{m'} = \kappa^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m'}(\beta)$$

für $m \neq m'$.

zu (iv): Es sind

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\gamma) = p\zeta^{pi} \neq p = \lambda^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}(\gamma)$$

und

$$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0}(\beta) = 0 \neq p\psi^{mb} = \kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m}(\beta).$$

zu (v): Es ist $\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m}(\beta\alpha_2) = 0 \neq p\psi^{m'b+a_2 i} = \kappa^{i'} \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m'}(\beta\alpha_2)$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} |A_1| &= |\{\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot \nu_{k,0,0} \mid i \in I^*, h, k \in I\} \dot\cup \{\lambda^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,l,m} \mid i \in I^*, l, m \in I\} \\ &= \dot\cup \{\kappa^i \uparrow_V^G \cdot \nu_{0,0,m} \mid i \in I^*, m \in I\}| \\ &= p^2(p-1) + p^2(p-1) + p(p-1) = 2p^3 - p^2 - p. \end{aligned}$$

Da $\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G$ vom zentralen Typ und $(\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G (1))^2 = p^4 = [G : Z(G)]$ ist, gilt $(\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G, \varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G) = 1$. Somit sind die Charaktere $\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G$ für $i, j \in I^*$ irreduzibel.

Weiter gilt $\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G \neq \varphi_0^{i'} \uparrow_U^G \cdot \lambda^{j'} \uparrow_V^G$ für $(i, j) \neq (i', j')$, denn es sind

$$\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G (\alpha_3) = p^2\psi^j \neq p^2\psi^{j'} = \varphi_0^{i'} \uparrow_U^G \cdot \lambda^{j'} \uparrow_V^G (\alpha_3)$$

für $j \neq j'$ und

$$\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G (\gamma) = p^2\zeta^{pi} \neq p^2\zeta^{pi'} = \varphi_0^{i'} \uparrow_U^G \cdot \lambda^{j'} \uparrow_V^G (\gamma)$$

für $i \neq i'$. Also ist $|A_2| = (p-1)^2$.

Da $A_i \subseteq \{$irreduzible Charaktere von G vom Grad $p^i\}$ für $i \in \{0, 1, 2\}$ ist, gilt $\sum_{\chi \in A_0 \cup A_1 \cup A_2} (\chi(1))^2 = |A_0| \cdot 1 + |A_1| \cdot p^2 + |A_2| \cdot p^4 = |G|$. Somit folgt $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

Für den Beweis von Tabelle 4.1 verwenden wir, dass $G' = \langle \alpha, \alpha_3, \gamma \rangle$, $G/G' = \langle \alpha G', \alpha_1 G', \gamma G' \rangle \cong C_p^3$, $Z(G) = \langle \alpha_3, \gamma \rangle$, $[G', G] = \langle \alpha_3 \rangle$, $[\langle \beta \rangle, G] = \langle \gamma \rangle$ und ebenfalls $[\langle \beta, \alpha_2 \rangle, G] = \langle \alpha_3, \gamma \rangle$ gilt.

Beweis von Tabelle 4.1 Es sei $q_*^0 := \{q^0_{a_3,c} \mid a_3, c \in I\}$ und $q_*^1, \ldots, q_*^7$ seien entsprechend definiert. Betrachtet man die Vertreter der Elemente von q_*^i modulo $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$ und beachtet man $Z(G) = \langle \alpha_3, \gamma \rangle$, gilt offenbar $q_*^i \cap q_*^j = \emptyset$ für $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$ und $i < j$, außer möglicherweise für $i = 2$ und $j = 5$. Analog gilt $q^6_{a,a_1,b} \neq q^6_{a',a_1',b'}$, $q^7_{\dot{a},\dot{a}_1} \neq q^7_{\dot{a}',\dot{a}_1'}$ für $a, a', a_1, a_1', b, b, \dot{a}, \dot{a}', \dot{a}_1, \dot{a}_1' \in I^*$, $(a, a_1, b) \neq (a', a_1', b')$ und $(\dot{a}, \dot{a}_1) \neq (\dot{a}', \dot{a}_1')$. Wegen $Z(G) = \langle \alpha_3, \gamma \rangle$ ist q_*^0 die Menge der Konjugiertenklassen von G der Länge 1. Desweiteren gilt:

(i) $q^1_{a_2,c} \neq q^1_{a_2',c'}$ für $a_2, a_2' \in I^*$, $c, c' \in I$ und $(a_2, c) \neq (a_2', c')$,

(ii) $q^2_{b,a_3} \neq q^2_{b',a_3'}$ für $b, b' \in I^*$, $a_3, a_3' \in I$ und $(b, a_3) \neq (b', a_3')$,

(iii) $q^5_{b,a_2} \neq q^5_{b',a_2'}$ für $b, b', a_2, a_2' \in I^*$ und $(b, a_2) \neq (b', a_2')$,

(iv) $q_*^2 \cap q_*^5 = \emptyset$,

(v) $q^3_{a,b,c} \neq q^3_{a',b',c'}$ für $a, a' \in I^*$, $b, b', c, c' \in I$ und $(a, b, c) \neq (a', b', c')$ sowie

(vi) $q^4_{a_1,b,a_3} \neq q^4_{a_1',b',a_3'}$ für $a_1, a_1' \in I^*$, $b, b', a_3, a_3' \in I$ und $(a_1, b, a_3) \neq (a_1', b', a_3')$.

zu (i): Wir nehmen an, es existiert ein $g \in G$ mit $(\alpha_2^{a_2}\gamma^c)^g = (\alpha_2^{a_2})^g\gamma^c = \alpha_2^{a_2'}\gamma^{c'}$. Somit sind $\alpha_2^{a_2}[\alpha_2^{a_2}, g]\gamma^c = \alpha_2^{a_2'}\gamma^{c'}$ und $[\alpha_2^{a_2}, g] = \alpha_2^{a_2'-a_2}\gamma^{c'-c}$. Wegen $[\alpha_2^{a_2}, g] \in [G', G] = \langle \alpha_3 \rangle$ ist $\alpha_2^{a_2'-a_2}\gamma^{c-c'} = 1$. Da $|\langle \alpha_2, \gamma \rangle| = p^2$, $\langle \alpha_2, \gamma \rangle \neq Z(G)$, $\langle \alpha_3, \gamma \rangle = Z(G)$ und $|Z(G)| = p^2$ ist, gilt $\alpha_3 \notin \langle \alpha_2, \gamma \rangle$. Folglich sind $a_2' = a_2$ und $c' = c$.

zu (ii): Angenommen es existiert ein $g \in G$ mit $(\beta^b\alpha_3^{a_3})^g = \beta^{b'}\alpha_3^{a_3'}$. Man erhält analog zu (i), dass $[\beta^b, g] = \beta^{b'-b}\alpha_3^{a_3'-a_3}$ ist. Desweiteren ist

$$[\beta^b, g] \in [\langle \beta \rangle, G] = \langle \gamma \rangle. \tag{4.0.2}$$

Wegen $b' - b \in \{-p+1, \ldots, p-1\}$ sind dementsprechend $b' = b$ und $a_3' = a_3$.

zu (iii): Es sei $g \in G$ mit $(\beta^b\alpha_2^{a_2})^g = \beta^{b'}\alpha_2^{a_2'}$. Wegen $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$ kann man ohne Einschränkung $b = b'$ annehmen. Damit sind $\beta^b\alpha_2^{a_2}[\beta^b\alpha_2^{a_2}, g] = \beta^b\alpha_2^{a_2'}$ und folglich $[\beta^b\alpha_2^{a_2}, g] = \alpha_2^{a_2'-a_2}$. Desweiteren hat man $[\beta^b\alpha_2^{a_2}, g] \in [\langle \beta, \alpha_2 \rangle, G] = \langle \alpha_3, \gamma \rangle = \langle \alpha_3, \beta^p \rangle$. Somit ist auch $a_2' = a_2$.

zu (iv): Die Aussage folgt analog zu (ii).

zu (v): **1. Fall:** $(a,b) \neq (a',b')$. Es gilt $\alpha^a\beta^b\gamma^c G' = \alpha^a\beta^b G' \neq \alpha^{a'}\beta^{b'}G' = \alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}G'$. Daraus folgt die Behauptung.

2. Fall: $(a,b) = (a',b')$ und $c \neq c'$. Es sei $h \in I$ mit $-ha + b \equiv_p 0$.

Dann ist $\varphi_h^1 \uparrow_U^G (\alpha^a\beta^b\gamma^c) = p\zeta^{pha+b+pc} \neq p\zeta^{pha+b+pc'} = \varphi_h^1 \uparrow_U^G (\alpha^a\beta^b\gamma^{c'})$.

zu (vi): **1. Fall:** $(a_1,b) \neq (a_1',b')$. Es ist $\alpha^{a_1}\beta^b G' \neq \alpha^{a_1'}\beta^{b'}G'$.

2. Fall: $(a_1,b) = (a_1',b')$ und $a_3 \neq a_3'$. Nach 4.0.1 ist $\lambda^1 \uparrow_V^G (\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3}) = \omega_{a_1}\psi^{ia_3} \neq \omega_{a_1}\psi^{ia_3'} = \lambda^1 \uparrow_V^G (\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3'})$.

Damit erhält man $|q_*^0 \dot\cup \ldots \dot\cup q_*^7| = p^2 + p(p-1) + p(p-1) + (p-1)^2 p + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)^2 + (p-1)^3 + (p-1)^2 = 3p^3 - 3p + 1 = |A_0 \dot\cup \ldots \dot\cup A_2|$. Also haben wir alle Konjugiertenklassen bestimmt und es muss nur noch die Länge der Konjugiertenklassen gezeigt werden.

Mit der Charaktertafel und der zweiten Orthogonalitätsrelation folgen die Konjugiertenklassenlängen der Elemente von $q_*^0, q_*^1, q_*^2, q_*^4, g_*^5, q_*^6$ und q_*^7. Desweiteren ist $G' = \langle \alpha_2, \alpha_3, \gamma \rangle$. Somit sind die Längen der Konjugiertenklassen in q_*^3 nach oben durch p^2 beschränkt.

Da die Konjugiertenklassen eine Partition von G bilden, ergeben sich auch die Längen der Konjugiertenklassen in q_*^3. $\square$

	Länge	1	p	p	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3
	Konj.kl.	$\alpha_3^{a_3}\gamma^c$	$\alpha_2^{a_2}\gamma^c$	$\beta^b\alpha_3^{a_3}$	$\alpha^a\beta^b\gamma^c$	$\alpha_1^{a_1}\beta^b\alpha_3^{a_3}$	$\beta^b\alpha_2^{a_2}$	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\beta^b$	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}$
Anzahl	Parameter	$a_3, c \in I$	$a_2 \in I^*, c \in I$	$b \in I^*, a_3 \in I$	$a \in I^*, b, c \in I$	$a_1 \in I^*, b, a_3 \in I$	$b, a_2 \in I^*$	$a, a_1, b \in I^*$	$a, a_1 \in I^*$
p^3	$\nu_{k,l,m}$	1	1	ψ^{mb}	$\psi^{ka}\psi^{mb}$	$\psi^{la_1}\psi^{mb}$	ψ^{mb}	$\psi^{ka}\psi^{la_1}\psi^{mb}$	$\psi^{ka}\psi^{la_1}$
$p(p-1)^2$	$\varphi_h^i \uparrow_U^G \cdot\nu_{k,0,0}$	$p\zeta^{pic}$	$p\zeta^{pi(a_2h+c)}$	0	0, falls $-ha+b \not\equiv_p 0$, sonst $p\zeta^{i(pha+b+pc+pka)}$	0	0	0	0
$p^2(p-1)$	$\lambda^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,l,m}$	$p\psi^{ia_3}$	0	$p\psi^{ia_3+mb}$	0	$\omega_{ia_1}\psi^{a_3i+la_1+mb}$	0	0	0
$p(p-1)$	$\kappa^i \uparrow_V^G \cdot\nu_{0,0,m}$	p	$p\psi^{ia_2}$	$p\psi^{mb}$	0	0	$p\psi^{ia_2+mb}$	0	0
$(p-1)^2$	$\varphi_0^i \uparrow_U^G \cdot\lambda^j \uparrow_V^G$	$p^2\zeta^{pic}\psi^{ja_3}$	0	0	0	0	0	0	0

mit $i, j \in I^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ und $h, k, l, m \in I := \{1, \ldots, p\}$. Desweiteren seien ζ eine primitive p^2 Einheitswuzel, $\psi = \zeta^p$ und $\omega_w := 1 + \sum_{q=1}^{p-1} \psi^{w(q-1)q/2}$ für $w \in \mathbb{Z}$. Mit $\nu_{k,l,m}$ seien die Elemente von $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/G')$ bezeichnet.

Tabelle 4.2 – Charaktertafel von $\phi_{17}(2211)a$

	α	β	α_2	α_3	γ
φ_h^i	ζ^{ihp}	ζ^i	ζ^{ihp}	1	ζ^{ip}
$(\varphi_h^i)^{\alpha_1^{-1}}$	$\zeta^{ihp}\zeta^{-ihp}$	$\zeta^i\zeta^{ip}$	ζ^{ihp}	1	ζ^{ip}
$(\varphi_h^i)^{\alpha_1^{-2}}$	$\zeta^{ihp}\zeta^{-2ihp}$	$\zeta^i\zeta^{2ip}$	ζ^{ihp}	1	ζ^{ip}
$(\varphi_h^i)^{\alpha_1^{-3}}$	$\zeta^{ihp}\zeta^{-3ihp}$	$\zeta^i\zeta^{3ip}$	ζ^{ihp}	1	ζ^{ip}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\varphi_h^i)^{\alpha_1^{(-p+1)}}$	$\zeta^{ihp}\zeta^{-(p-1)ihp}$	$\zeta^i\zeta^{(p-1)ip}$	ζ^{ihp}	1	ζ^{ip}

Tabelle 4.3 – Konjugierte von φ_h^i in $\phi_{17}(2211)a$

	α_1	β	α_2	α_3	γ
λ^i	1	1	1	ψ^i	1
$(\lambda^i)^{\alpha^{-1}}$	1	1	ψ^i	ψ^i	1
$(\lambda^i)^{\alpha^{-2}}$	ψ^i	1	ψ^{2i}	ψ^i	1
$(\lambda^i)^{\alpha^{-3}}$	ψ^{3i}	1	ψ^{3i}	ψ^i	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\lambda^i)^{\alpha^{(-p+1)}}$	$\psi^{(p-1)(p-2)i/2}$	1	$\psi^{(p-1)i}$	ψ^i	1

Tabelle 4.4 – Konjugierte von λ^i in $\phi_{17}(2211)a$

	α_1	β	α_2	α_3	γ
κ^i	1	1	ψ^i	1	1
$(\kappa^i)^{\alpha^{-1}}$	ψ^i	1	ψ^i	1	1
$(\kappa^i)^{\alpha^{-2}}$	ψ^{i2}	1	ψ^i	1	1
$(\kappa^i)^{\alpha^{-3}}$	ψ^{i3}	1	ψ^i	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\kappa^i)^{\beta^{(-p+1)}}$	$\psi^{i(p-1)}$	1	ψ^i	1	1

Tabelle 4.5 – Konjugierte von κ^i in $\phi_{17}(2211)a$

Bezeichnung	Vertreter	Parameter	Länge	Anzahl
$q^0_{b_1,b_2}$	$\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}$	$b_1, b_2 \in I$	1	p^2
q^1_{a,b_2}	$\alpha^a\beta_2^{b_2}$	$a \in I^*, b_2 \in I$	p	$(p-1)p$
q^2_{a,b_1}	$\alpha^a\beta^{-a}\beta_1^{b_1}$	$a \in I^*, b_1 \in I$	p	$(p-1)p$
q^3_{a,a_1,b_2}	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\beta_2^{b_2}$	$a_1 \in I^*, a, b_2 \in I$	p^2	$(p-1)p^2$
$q^4_{a_2,b_1}$	$\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}$	$a_2 \in I^*, b_1 \in I$	p^2	$(p-1)p$
$q^5_{a,b}$	$\alpha^a\beta^b$	$a \in I^*, b \in I^* \setminus \{p-a\}$	p^2	$(p-1)(p-2)$
q^6_b	β^b	$b \in I^*$	p^2	$(p-1)$
q^7_{a,a_2,b_1}	$\alpha^a\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}$	$a, a_2 \in I^*, b_1 \in I$	p^2	$(p-1)^2p$
q^8_{a,a_1,a_2}	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}$	$a_1, a_2 \in I^*, a \in I$	p^3	$(p-1)^2p$

$I := \{1, \ldots, p\}$, $I^* := \{1, \ldots, p-1\}$.

Tabelle 4.6 – Konjugiertenklassen von $\phi_{19}(2211)a$

ϕ_{19} :

Wir betrachten $G := \phi_{19}(2211)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_1, \alpha_2] = \beta, [\beta, \alpha_i] = \alpha_i^p = \beta_i, [\alpha, \alpha_1] = \beta_1, \alpha^p = \beta^p = \beta_i^p = 1 (i = 1, 2)\rangle$. Weiter seien $U := \langle \alpha_1, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$ und $V := \langle \alpha_2, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$. Es sind $G' = \langle \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$, $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ und $G/G' = \langle \alpha G', \alpha_1 G', \alpha_2 G'\rangle \cong C_p^3$. Man beweist zunächst die Tabellen 4.8, 4.9, 4.10 und 4.7, dies erfolgt vollkommen analog wie im vorherigen Fall. Wir beweisen hier nur die Tabelle 4.6.

Beweis der Tabelle 4.6: Betrachtet man die Vertreter der Konjugiertenklassen modulo G' und beachtet man, dass $Z(G) = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ ist, gilt offenbar $q^i_* \cap q^j_* = \emptyset$ für $i, j \in \{0, \ldots, 8\} \setminus \{2\}$ und $i < j$, außer möglicherweise für $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 5), (2, 5)\}$. Aufgrund von $[\langle \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle, G] = [\langle \alpha, \beta\rangle, G] = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ gilt damit auch, dass $q^i_* \cap q^j_* = \emptyset$ für $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 5), (2, 5)\}$ ist. Desweiteren sind $|q^0_*| = p^2$, $|q^1_*| = (p-1)p$, $|q^2_*| = (p-1)p$, $|q^5_*| = (p-1)(p-2)$ und $|q^6_*| = p-1$ wegen $[\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}, G] = \{1\}$, $[\alpha^a\beta_2^{b_2}, G] = \langle \beta_1\rangle$, $[\alpha^a\beta^{-a}\beta_1^{b_1}, G] = \langle \beta_2\rangle$, $[\alpha^a\beta^b, G] \subseteq \langle \beta_1, \beta_2\rangle$, $[\beta^{b'}, G] = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ für $a, b' \in I^*$, $b_1, b_2 \in I$ und $b \in I^* \setminus \{p-a\}$. Berücksichtigt man noch die vorläufige Charaktertafel 4.7, so folgt, dass die Konjugiertenklassen in q^3_* und die Konjugiertenklassen in q^4_* jeweils paarweise verschieden sind. Dies verdeutlichen wir an q^4_*. Es sei $\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}$ konjugiert zu $\alpha_2^{a_2'}\beta_1^{b_1'}$ und $a_2, a_2' \in I^*$ sowie $b_1, b_1' \in I$. Dann ist zunächst $a_2 = a_2'$ und es folgt

$$\psi^{b_1}\omega_{-a_2} = \lambda\!\uparrow_V^G (\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}) = \lambda\!\uparrow_V^G (\alpha_2^{a_2'}\beta_1^{b_1'}) = \psi^{b_1'}\omega_{-a_2}.$$

Wegen $\omega_{-a_2} \neq 0$ nach 4.0.1 ist $\psi^{b_1} = \psi^{b_1'}$ und damit $b_1 = b_1'$.

Wir zeigen nun $|q^7_*| = (p-1)^2 p$. Es seien $a, a_2, a', a'_2 \in I^*$ und $b_1, b'_1 \in I$. Falls nun $(a, a_2) \neq (a', a'_2)$ ist, gilt $q^7_{a,a_2,b_1} \neq q^7_{a',a'_2,b'_1}$ wegen $G' = \langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle$.

Es seien nun $(a, a_2) = (a', a'_1)$ und $b_1 \neq b'_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda\!\uparrow_V^G (\alpha^a \alpha_2^{a_2} \beta_1^{b_1}) = \epsilon^{(1)}_{a,a_2,b_1} &= \psi^{b_1}(\sum_{q=1}^{p-1} \psi^{-a_2(q-1)q/2+qa} + 1) \\ &\neq \psi^{b'_1}\left(\sum_{q=1}^{p-1} \psi^{-a_2(q-1)q/2+qa} + 1\right) = \epsilon^{(1)}_{a,a_2,b'_1} \\ &= \lambda\!\uparrow_V^G (\alpha^{a'} \alpha_2^{a'_2} \beta_1^{b'_1}). \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass

$$1 + \sum_{q=1}^{p-1} \psi^{-a_2(q-1)q/2+qa} = 2 + \sum_{\substack{q=1 \\ -a_2 q \not\equiv_p -2a-a_2}}^{p-1} \psi^{a_2(q-1)q/2+qa} \neq 0$$

ist, denn das Minimalpolynom von ψ ist $1 + X + \ldots + X^{p-1} \in \mathbb{Q}[X]$. Also sind $|q^7_*| = (p-1)^2 p$.

Wegen $G' = \langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle$ gilt offensichtlich $|q^8_*| = (p-1)^2 p$.

Analog wie im Fall ϕ_{17} folgt nun die Behauptung. $\square$

	Länge	1	p	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3
	Konj.kl.	$\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}$	$\alpha^a\beta_2^{b_2}$	$\alpha^a\beta^{-a}\beta_1^{b_1}$	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\beta_2^{b_2}$	$\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}$	$\alpha^a\beta^b(b \neq -a)$	β^b	$\alpha^a\alpha_2^{a_2}\beta_1^{b_1}$	$\alpha^a\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}$
Anzahl	Parameter	$b_1, b_2 \in I$	$a \in I^*$, $b_2 \in I$	$a \in I^*$, $b_1 \in I$	$a_1 \in I^*$, $a, b_2 \in I$	$a_2 \in I^*$, $b_1 \in I$	$a \in I^*, b \in I^* \setminus \{p-a\}$	$b \in I^*$	$a, a_2 \in I^*$, $b_1 \in I$	$a_1, a_2 \in I^*$, $a \in I$
p^3	$\nu_{k,l,m}$	1	ψ^{ma}	ψ^{ma}	ψ^{ka_1+ma}	ψ^{la_2}	ψ^{ma}	1	ψ^{la_2+ma}	$\psi^{ka_1+la_2+ma}$
$p^2(p-1)$	$\nu_{k,0,m} \cdot \varphi^i \uparrow_U^G$	$p\psi^{ib_2}$	$p\psi^{ib_2+ma}$	0	$\psi^{ib_2+ka_1+ma}\omega_{ia_1}$	0	0	0	0	0
$p^2(p-1)$	$\nu_{0,l,m} \cdot \lambda^j \uparrow_V^G$	$p\psi^{jb_1}$	0	$p\psi^{jb_1+ma}$	0	$\psi^{jb_1+la_2}\omega_{-ja_2}$	0	0	$\psi^{la_2+ma}\epsilon^{(j)}_{a,a_2,b_1}$	0
$p(p-1)$	$\nu_{0,0,m} \cdot \kappa^i \uparrow_U^G$	p	$p\psi^{ma}$	$p\psi^{-ia+ma}$	0	0	$p\psi^{ib+ma}$	$p\psi^{ib}$	0	0
$(p-1)^2$	$\varphi^i \uparrow_U^G \cdot \lambda^j \uparrow_V^G$	$p^2\psi^{ib_2+jb_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0

mit $i, j \in I^* := \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $k, l, m \in I := \{0, \ldots, p-1\}$, $\omega_w := 1 + \sum_{q=1}^{p-1} \psi^{w(q-1)q/2}$ und $\epsilon^{(j)}_{a,a_2,b_1} := (1 + \sum_{q=1}^{p-1} \psi^{-ja_2(q-1)q/2+jqa})\psi^{jb_1}$.
Desweiteren sei ψ eine primitive p-te Einheitswurzel. Mit $\nu_{k,l,m}$ seien die Elemente von $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/G')$ bezeichnet.

Tabelle 4.7 – Charaktertafel von $\phi_{19}(2211)a$

	α_1	α	β	β_1	β_2
φ^i	1	1	1	1	ψ^i
$(\varphi^i)^{\alpha_2^{-1}}$	1	1	ψ^i	1	ψ^i
$(\varphi^i)^{\alpha_2^{-2}}$	ψ^i	1	ψ^{2i}	1	ψ^i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\varphi^i)^{\alpha_2^{-k}}$	$\psi^{\binom{k}{2}i}$	1	ψ^{ki}	1	ψ^i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\varphi^i)^{\alpha_2^{-p+1}}$	$\psi^{(p-1)(p-2)i/2}$	1	$\psi^{(p-1)i}$	1	ψ^i

Tabelle 4.8 – Konjugierte von φ^i in $\phi_{19}(2211)a$

Im Folgenden wollen wir untersuchen, ob die tensor-zerlegbaren Charaktere der oben aufgeführten Gruppen trivial tensor-zerlegbar sind oder nicht. Es sei $G \in \{\phi_{17}(2211)a, \phi_{19}(2211)a\}$. Weiter seien $U, V < G$, $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(U)$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(V)$, so dass $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G$ irreduzibel ist. Falls nun $\varphi\uparrow_U^G \cdot \lambda\uparrow_V^G$ trivial tensor-zerlegbar ist, dann existiert per definitionem ein Normalteiler N von G mit $(\lambda\uparrow_V^G \cdot \varphi\uparrow_U^G)\downarrow_N^G = p\chi$, $\chi(1) = p$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(N)$. Ohne Einschränkung kann man nach Lemma 3.15 annehmen, dass $Z(G) \subseteq N$ ist. Da die tensor-zerlegbaren Charaktere der Gruppen $\phi_{17}(2211)a$ und $\phi_{19}(2211)a$ vom zentralen Typ sind und $|Z(G)| = p^2$ ist, gilt

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \notin Z(G) \\ p \cdot \lambda(n) \cdot \varphi(n), & \text{falls } n \in Z(G) \end{cases}$$

für $n \in N$ und somit hat man $|N| \cdot (\chi, \chi)_N = p^2 \sum_{n \in Z(G)} 1 = p^2 \cdot p^2 = p^4$, woraus wiederum $|N| = p^4$ folgt. Wegen $|G/N| = p^2$ gilt $G' \subseteq N$. Folglich ist es sinnvoll irreduzible Charaktere von Normalteilern der Ordnung p^4 mit $G' \subseteq N$ zu betrachten.

	α_2	α	β	β_1	β_2
λ^j	1	1	1	ψ^j	1
$(\lambda^j)^{\alpha_1^{-1}}$	1	ψ^j	ψ^j	ψ^j	1
$(\lambda^j)^{\alpha_1^{-2}}$	ψ^{-j}	ψ^{2j}	ψ^{2j}	ψ^j	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\lambda^j)^{\alpha_1^{-k}}$	$\psi^{-\binom{k}{2}j}$	ψ^{kj}	ψ^{kj}	ψ^j	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\lambda^j)^{\alpha_1^{-p+1}}$	$\psi^{-(p-1)(p-2)j/2}$	$\psi^{(p-1)j}$	$\psi^{(p-1)j}$	ψ^j	1

Tabelle 4.9 – Konjugierte von λ^i in $\phi_{19}(2211)a$

	α_1	α	β	β_1	β_2
κ^i	1	1	ψ^i	1	1
$(\kappa^i)^{\alpha_2^{-1}}$	ψ^i	1	ψ^i	1	1
$(\kappa^i)^{\alpha_2^{-2}}$	ψ^{2i}	1	ψ^i	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\kappa^i)^{\alpha_2^{-k}}$	ψ^{ki}	1	ψ^i	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(\kappa^i)^{\alpha_2^{-p+1}}$	$\psi^{(p-1)i}$	1	ψ^i	1	1

Tabelle 4.10 – Konjugierte von κ^i in $\phi_{19}(2211)a$

4.1 Bemerkung:

Die tensor-zerlegbaren Charaktere der Gruppen der Isoklinieklassen ϕ_{17} und ϕ_{19} sind trivial tensor-zerlegbar.

Beweis:

Wir verwenden Bemerkung 3.17.

zu ϕ_{17}: Man betrachte wieder den Verteter $\phi_{17}(2211)a$. Es sei nun $N := \langle\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle \supseteq \langle\alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle = G'$. Wegen $G' \subseteq N$ ist N ein Normalteiler von G. Weiter sei $\mu_{i,j} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\langle\alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle)$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha_2 & \alpha_3 & \gamma \\ \hline \mu_{i,j} & 1 & \psi^i & \psi^j \end{array},$$

wobei ψ eine primitive p-te Einheitswurzel ist und $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$ sind. Man beachte hierbei, dass $\langle\alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle = \langle\alpha_2\rangle \times \langle\alpha_3\rangle \times \langle\gamma\rangle \cong C_p^3$ ist.

Es ist $\alpha_2^{\alpha} = \alpha_2\alpha_3$ und $Z(G) = \langle\alpha_3, \gamma\rangle$. Durch Induktion über k ergibt sich

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha_2 & \alpha_3 & \gamma \\ \hline \mu_{i,j}^{\alpha^{-k}} & \psi^{kj} & \psi^i & \psi^j \end{array}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und somit gilt

$$p \cdot \mu_{i,j} \uparrow_{\langle\alpha_2,\alpha_3,\gamma\rangle}^{N} (n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \notin Z(G) \\ p \cdot p\psi^{ia_3}\psi^{jc}, & \text{falls } n = \alpha_3^{a_3}\gamma^c \end{cases} = (\varphi_0^j \uparrow_U^G \cdot\lambda^i \uparrow_V^G)\downarrow_N (n).$$

Damit ist also $(\varphi_0^j \uparrow_U^G \cdot\lambda^i \uparrow_V^G)\downarrow_N = p \cdot \chi_{i,j}$ mit $\chi_{i,j} = \mu_{i,j} \uparrow^N$ für alle $i,\ j \in I^*$. Die Charaktere $\varphi_0^j \uparrow_U^G \cdot\lambda^i \uparrow_V^G$ sind also trivial tensor-zerlegbar.

zu ϕ_{19}: Es seien $G := \phi_{19}(2211)a$ und $N := \langle\alpha_1, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle \supseteq \langle\beta, \beta_1, \beta_2\rangle = G'$. Desweiteren sei $\mu_{i,j} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\langle\beta, \beta_1, \beta_2\rangle)$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{c|ccc} & \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \mu_{i,j} & 1 & \psi^i & \psi^j \end{array},$$

wobei ψ eine primitive p-te Einheitswurzel ist und $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$ sind. Man beachte, dass $\langle\beta, \beta_1, \beta_2\rangle = \langle\beta\rangle \times \langle\beta_1\rangle \times \langle\beta_2\rangle \cong C_p^3$ ist.

Es ist $\beta^{\alpha_1} = \beta\beta_1$ und $Z(G) = \langle\beta_1, \beta_2\rangle$. Durch Induktion über k erhält man

$$\begin{array}{c|ccc} & \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \mu_{i,j}^{\alpha_1^{-k}} & \psi^{ki} & \psi^i & \psi^j \end{array}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt

$$p \cdot \mu\uparrow^N_{\langle \beta, \beta_1, \beta_2 \rangle}(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \notin Z(G) \\ p \cdot p\psi^{ib_1}\psi^{jb_2}, & \text{falls } n = \beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2} \end{cases} = \varphi^j\uparrow^G_U \cdot \lambda^i\uparrow^G_V\downarrow_N(n).$$

Analog wie oben folgt die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Ritter, D. (2008). *Tensor decompasable characters of p-groups*, Diplomarbeit, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH-Aachen.

[2] Beyl, F.R., Tappe, J. (1982). *Group Extensions, Representations, and the Schur Multiplicator*, Springer, Berlin.

[3] Isaacs, I. M. (2006). *Character Theory of Finite Groups*, AMS Publishing, Rhode Island.

[4] James, R. (1980). *The Groups of Order p^6*, Mathematics of Computation, Vol.34, No.150, pp.613-637.

[5] Huppert, B. (1967). *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin.

[6] Huppert, B. (1998). *Character Theory of Finite Groups*, De Gruyter.