Nachholklausur zur Vorlesung Algebra I (WS 2002/2003)

Prof. Dr. G. Hiß

Von den 14 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 50 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, dass **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!
Hinweis: Gemäß der Konvention der Vorlesung ist $0 \notin \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.
Es sei G eine Gruppe und $\varphi : G \to G$ die Abbildung mit $\varphi(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass φ genau dann ein Homomorphismus von G ist, wenn G abelsch ist. *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Die alternierende Gruppe A_5 operiere auf einer Menge X mit $|X| = 4$. Zeigen Sie, dass $gx = x$ für alle $g \in A_5, x \in X$ gilt. Sie dürfen verwenden, dass A_5 einfach ist. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 153. *2 Punkte*

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 153. *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Es seien G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe von G und

$$N := \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass N der größte in U enthaltene Normalteiler von G ist. *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Es seien G eine Gruppe und $a, b \in G$ mit $a^2 = b^2 = 1$ und $aba = bab$. Zeigen Sie, dass $(ab)^3 = 1$ gilt. *2 Punkte*

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie alle Ideale $I \trianglelefteq \mathbb{Q}[X]$ mit $(X^3 - X) \subseteq I$. *2 Punkte*

b) Es sei $R := \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X)$. Bestimmen Sie alle Ideale von R. Welche dieser Ideale sind Primideale und welche sind maximal? *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$. *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel (im jeweils angegebenen Polynomring)?

a) $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ *1 Punkt*
$X^4 + 1 \in \mathbb{F}_{17}[X]$ *1 Punkt*
$X^4 + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ *1 Punkt*

b) $X^4 + 14X^3 + 77X^2 + 91 + 2002 \in \mathbb{Q}[X]$ *2 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \geqslant 5$. Zeigen Sie, dass $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ genau dann reduzibel ist, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$ ist. *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es seien $\omega := \sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$ und $K := \mathbb{Q}(\omega) \subset \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ von ω über $\mathbb{Q}$ und den Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$. Welche Automorphismen hat K? *2 Punkte*

b) Es sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von μ über $\mathbb{Q}$. Wie viele Teilkörper enthält L (L eingeschlossen)? *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei L/K eine Körpererweiterung, so dass $[L : K]$ prim ist. Zeigen Sie, dass $L = K(a)$ für alle $a \in L \setminus K$ ist. *2 Punkte*

Aufgabe 12.
Welche Ordnung hat ein Zerfällungskörper von $X^6 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ über $\mathbb{F}_2$? *2 Punkte*

Aufgabe 13.
Es seien $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $X^3 - X^2 + X - 2$ und $b = a^2 - a - 1 \in \mathbb{Q}(a)$.
Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(a) = b^{-1}$ und $\deg f \leqslant 2$. *4 Punkte*

Aufgabe 14.
Es sei K ein endlicher Körper und $f \in K[X]$ irreduzibel mit $\deg f = n$. Es sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie, dass $[L : K] = n$ gilt. *3 Punkte*