Nahholklausur zur Vorlesung Algebra I (WS 98/99)

Prof. Dr. G. Hiss

Von den 12 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 63 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, daß **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es seien G eine Gruppe, $U \leq G$ und

$$N := \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}.$$

Man zeige: N ist der größte in U enthaltene Normalteiler von G. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei G eine Gruppe der Ordnung 56. Man zeige ohne Benutzung der Sätze von Feit-Thompson oder Burnside:
a) G ist auflösbar. *3 Punkte*
b) Es gilt $G^{'''} = \{1\}$. *3 Punkte*

Aufgabe 3.
Man zeige: Die alternierende Gruppe A_5 besitzt eine Operation auf einer Menge mit 6 Elementen mit genau einer Bahn. *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Es seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie $d := \mathrm{ggT}(m,n) \in \mathbb{N}$ und $v := \mathrm{kgV}(m,n) \in \mathbb{N}$.
a) Man bestimme die Invariantenteiler der Matrix *2 Punkte*

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}.$$

b) Man zeige: Es gilt $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/v\mathbb{Z})$ als abelsche Gruppen.
3 Punkte

Aufgabe 5.
Es seien K ein Körper, $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $I := (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_n]$.
Man zeige: I ist ein maximales Ideal. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 3$ und $f := X^3 + Y^3 + Z^3 \in K[X, Y, Z]$. Man zeige: f ist irreduzibel. *4 Punkte*
Hinweis: $Y + Z \in K[Y, Z]$ ist ein irreduzibles Element.

Aufgabe 7.
Es seien $\alpha := \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ und $R := \mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{R}$. Der Ring R ist ein Hauptidealring; dies ist nicht zu beweisen. Man zeige:
a) Es gilt $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$ als Ringe. *4 Punkte*
b) Es ist $7 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \in R$ eine Zerlegung in irreduzible Elemente und es gilt die Ringisomorphie $R/(7) \cong \mathbb{F}_7 \oplus \mathbb{F}_7$. *5 Punkte*
c) Es gilt $R/(3) \cong \mathbb{F}_9$ als Ringe und $R/(2)$ ist als Ring nicht isomorph zu einer direkten Summe von Körpern. *4 Punkte*
Hinweis: Man benutze a) zur Unteruchung von $R/(3)$.

Aufgabe 8.
Es sei $L := \mathbb{F}_{p^n}$ der Körper mit p^n Elementen.
a) Man bestimme bis auf Isomorphie alle Körper K, für die es einen Körpermonomorphismus $K \hookrightarrow L$ gibt. *2 Punkte*
b) Wieviele solche Körpermonomorphismen gibt es für die Körper K aus a) jeweils? *3 Punkte*

Aufgabe 9.
Es seien $\alpha := i\sqrt[4]{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $K := \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Gibt es einen Körpermonomorphismus $K \hookrightarrow \mathbb{R}$? *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Man zeige: $\alpha \in \mathbb{C}$ ist genau dann algebraisch über $\mathbb{Q}$, wenn die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$ nur endlich viele Zwischenkörper besitzt. *4 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $\alpha := \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}$.
a) Man bestimme den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. *3 Punkte*
b) Ist $\mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung? *2 Punkte*
Hinweis: Es ist $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe 12.
Es sei $f := X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
a) Man zeige: f ist irreduzibel. Man bestimme den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f und den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$. *3 Punkte*
b) Man gebe die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, die Zwischenkörper von $L \supseteq \mathbb{Q}$ und die Galois-Korrespondenz an. *4 Punkte*