Klausur zur Vorlesung Algebra I (WS 98/99)

Prof. Dr. G. Hiss

Von den 12 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 57 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, daß **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es seien G eine endliche Gruppe und $a, b \in G$. Man zeige: Es gilt $|ab| = |ba|$. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $0 < n \in \mathbb{N}$ und $K := \mathbb{F}_{p^n}$ der Körper mit p^n Elementen. Man gebe zu den folgenden abelschen Gruppen isomorphe direkte Produkte zyklischer Gruppen an:
a) $G := (K \setminus \{0\}, \cdot)$. *2 Punkte*
b) $H := (K, +)$. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es seien G eine endliche Gruppe, $P \leq G$ eine p-Sylow-Gruppe und $U \leq G$ mit $N_G(P) \leq U$. Man zeige: Es gilt $N_G(U) = U$.
Hinweis: Für $g \in N_G(U)$ betrachte man gPg^{-1}. *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei $G := GL_2(\mathbb{F}_4)$ die volle lineare Gruppe vom Grad 2 über dem Körper $\mathbb{F}_4$. Man zeige: Es gilt $G' = SL_2(\mathbb{F}_4)$ und $SL_2(\mathbb{F}_4)$ ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5.
Hinweis: Man lasse $SL_2(\mathbb{F}_4)$ auf geeigneten Teilräumen von $(\mathbb{F}_4)^{2\times 1}$ operieren. *6 Punkte*

Aufgabe 5.
Es seien $R := \mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ und $N : R \to \mathbb{Z} : z \mapsto z\bar{z}$, wobei $\bar{z} \in \mathbb{C}$ das zu $z \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Element bezeichne.
a) Es sei $0 \neq a \in R$. Man zeige: Es gilt $|R/(a)| = N(a)$. *3 Punkte*
b) Man zeige: Es gilt $R/(3) \cong \mathbb{F}_9$ und $R/(5) \cong \mathbb{F}_5 \oplus \mathbb{F}_5$ als Ringe. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $a := \sqrt[3]{1 + \sqrt{11}} \in \mathbb{R}$. Ist $a \in \mathbb{Q}$? *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Man zeige: Das Polynom $X^2 + 1$ ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$, wenn $p \equiv -1 \bmod 4$ gilt. *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Es seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ mit Galois-Gruppe $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Ferner seien $R := \mathbb{Z}[\zeta] \subseteq K$ und $N : R \to \mathbb{C} : a \mapsto \prod_{\sigma \in G} \sigma(a)$. Man zeige:
a) Es gilt $R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ und $N(a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in R$. *3 Punkte*
b) Genau dann ist $a \in R$ Einheit in R, wenn $N(a) = \pm 1$ gilt. *3 Punkte*

Aufgabe 9.
Es seien K ein Körper, $f, g \in K[X]$ irreduzibel und g besitze in $K[X]/(f)$ eine Nullstelle. Man zeige: $\deg(g)$ ist ein Teiler von $\deg(f)$. *2 Punkte*

Aufgabe 10.
Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$ und $L \supseteq K$ eine endliche Körpererweiterung, so daß p kein Teiler von $[L : K]$ ist. Man zeige: L ist separabel über K. *2 Punkte*

Aufgabe 11.
a) Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und X eine Menge, auf der G transitiv und treu operiere, d. h., G hat auf X genau eine Bahn und kein $1 \neq g \in G$ läßt alle Elemente von X fest. Man zeige: Für alle $x \in X$ gilt $G_x = \{1\}$. *3 Punkte*
b) Es seien K ein Körper, $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel mit abelscher Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f)$. Man zeige: Es gilt $|\mathrm{Gal}(f)| = \deg(f)$. *3 Punkte*

Aufgabe 12.
Es seien $f := X^8 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $K \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f.
a) Man gebe die Zerlegung von f als Produkt irreduzibler Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ (Begründung!) und ein primitives Element für K über $\mathbb{Q}$ an. *3 Punkte*
b) Man bestimme die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f)$ und gebe primitive Elemente über $\mathbb{Q}$ für alle Teilkörper von K sowie die Galois-Korrespondenz an. *5 Punkte*
c) Welche der Teilkörper von K sind normal über $\mathbb{Q}$? *2 Punkte*