Nachholklausur zur „Algebra I" (WS 93/94)

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.
Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Sei $a = \sqrt[5]{3}$. Schreiben Sie a^{-1} als Polynom in a, mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. *6 Punkte*

Aufgabe 2.

1. Bestimmen Sie alle Ideale in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. *3 Punkte*
2. Bestimmen Sie die Primideale und maximalen Ideale in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. *3 Punkte*
3. Bestimmen Sie die Nullteiler und Einheiten in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei G eine p-Gruppe.

1. Sei X ein Operationsbereich für G und $X_0 = \{x \in X; xg = x \text{ für alle } g \in G\}$.
   Zeigen Sie, daß $|X| \equiv |X_0| \pmod p$ ist. *3 Punkte*
2. Zeigen Sie: Die Anzahl der Untergruppen von G, die nicht Normalteiler in G sind, ist durch p teilbar. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
G sei eine Gruppe, N ein Normalteiler in G vom Index 2, $z \in N \cap Z(G)$ ein Element der Ordnung 2.
Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & \begin{cases} g & , \text{ falls } g \in N \\ gz & , \text{ falls } g \notin N \end{cases} \end{array}$$

ist ein Automorphismus von G. *7 Punkte*

Aufgabe 5.
Es seien η_7 eine primitive 7. Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $L = \mathbb{Q}(\eta_7)$.

1. Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe G der Erweiterung $L \supset \mathbb{Q}$. *2 Punkte*
2. Geben Sie Erzeuger für alle Untergruppen von G an. *3 Punkte*
3. Sei $K = L \cap \mathbb{R}$ der reelle Teilkörper von L.
   Welche Untergruppe von G hat K als Fixkörper? *4 Punkte*

Aufgabe 6.

1. Wieviele Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 22 gibt es? *6 Punkte*
2. Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 2211 ist auflösbar. *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Welche der folgenden Polynome aus $\mathbb{Z}[X]$ sind irreduzibel?
Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $X^3 + 2X^2 + X + 1$ *3 Punkte*
2. $X^5 - 18X^3 + 6X^2 + 15X + 6$ *3 Punkte*
3. $X^4 + 1$ *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Seien G eine Gruppe und M ein Normalteiler in G, so daß G/M kommutativ ist. Zeigen Sie: Ist $M \leq H$ für eine Untergruppe $H \leq G$, dann ist H Normalteiler in G. *5 Punkte*

Aufgabe 9.
$\mathrm{Aut}(G)$ sei die Automorphismengruppe der Gruppe G.
Wir definieren für $g \in G$ den Automorphismus $\pi_g : G \to G$ durch $\pi_g(h) = g^{-1}hg$.
$\mathrm{Inn}(G) = \{\pi_g; g \in G\}$ sei die Gruppe der inneren Automorphismen von G.
Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$. *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2})$ und $\alpha = \sqrt[3]{3}\sqrt{2}$.

1. Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{Q}$-Vektorraums K. *3 Punkte*
2. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\alpha^* : K \to K, x \mapsto x \cdot \alpha$ bezüglich B, sowie deren Spur und Determinante. *4 Punkte*
3. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. *5 Punkte*

Aufgabe 11.

1. Seien G eine Gruppe und N, M Normalteiler von G. Zeigen Sie: Wenn N einfach ist, dann gilt entweder $N \subseteq M$ oder $N \cap M = \{1\}$. *4 Punkte*
2. Benutzen Sie 1. und die Einfachheit von A_5, um zu zeigen, daß $\{1\}$, A_5 und S_5 die einzigen Normalteiler von S_5 sind. *6 Punkte*

Aufgabe 12.

1. Welchen Satz über die Struktur der multiplikativen Gruppe eines endlichen Körpers kennen Sie? (kein Beweis nötig) *3 Punkte*
2. Sei p eine Primzahl in $\mathbb{Z}$. Benutzen Sie 1., um zu zeigen:
   (a) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$, die von p nicht geteilt wird, gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. *4 Punkte*
   (b) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$. *1 Punkt*

Aufgabe 13.
$\mathbb{F}_n$ sei der endliche Körper mit n Elementen.

1. Welche Ordnung und welche Struktur hat die Galoisgruppe G der Erweiterung $\mathbb{F}_{16} \supseteq \mathbb{F}_2$? *4 Punkte*
2. Welche Fixkörper haben die Untergruppen von G ? *4 Punkte*
3. Jeder Teilkörper von $\mathbb{F}_{16}$ zerfällt unter der Operation des Frobenius-Automorphismus in Bahnen. Bestimmen Sie für jeden Teilkörper die Bahn*längen* (mit Vielfachheiten). *6 Punkte*
