2. Klausur zur Algebra I (WS 91/92)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Klausuren zusammen müssen mindestens 40 Punkte, in jeder Klausur jeweils mindestens 1 Punkt erzielt werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ sind irreduzibel, welche reduzibel? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
(a) $X^5 + 6X^4 + 8X^3 - 24X + 14$
(b) $X^4 + X^3 + 1$
(c) $X^4 + X^2 + 1$ 6 Pkte.

Aufgabe 2.
Sei $a := \sqrt[4]{2}$. Berechnen Sie das Inverse von $b := a^3 - a^2 + a + 1 \in \mathbb{Q}(a)$. Geben Sie dazu ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad ≤ 3 an mit $f(a) = b^{-1}$. 6 Pkte.

Aufgabe 3.
Das Polynom $f := X^4 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ ist irreduzibel (das müssen Sie nicht zeigen); also ist $K := \mathbb{Z}_2[X]/(f)$ ein endlicher Körper. Zur Abkürzung schreiben wir $\bar{g} := g + (f)$ für $g \in \mathbb{Z}_2[X]$.
(a) Berechnen Sie die Ordnung von $1 + \bar{X}$ in der multiplikativen Gruppe von K.
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $1 + \bar{X}$ über $\mathbb{Z}_2$. 6 Pkte.

Aufgabe 4.
Sei $K := \mathbb{Q}$ und $L := K(\sqrt{3}, i)$.
(a) Berechnen Sie $[L : K]$ und eine Basis von L über K.
(b) Zeigen Sie, daß es ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ gibt. Geben Sie ein solches α explizit an.
(c) Berechnen Sie $N_{L/K}(\sqrt{3})$ und $Tr_{L/K}(\sqrt{3})$ (als Determinante bzw. Spur der linearen Abbildung $\sqrt{3}^{\cdot} : x \mapsto \sqrt{3} \cdot x$ von L nach L). 9 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei L ein Körper mit 2^6 Elementen. Wieviele Unterkörper hat L? Wieviele Elemente $\alpha \in L$ gibt es mit $L = K(\alpha)$, wenn K der Primkörper von L ist? Begründen Sie Ihre Antworten! 7 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei $L \supseteq K$ und $\alpha \in L$ mit $[K(\alpha) : K]$ ungerade. Zeigen Sie: $K(\alpha) = K(\alpha^2)$. 5 Pkte.

Aufgabe 7.
Berchnen Sie $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(X^7 - 1)$; wieviele Unterkörper hat der Zerfällungskörper L von $X^7 - 1$ über $\mathbb{Q}$? Geben Sie für einen Unterkörper M von L mit $[M : \mathbb{Q}] = 2$ ein primitives Element an und bestimmen Sie sein Minimalpolynom. 8 Pkte.