Nachholklausur zur Algebra I (12. 4. 96)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 65 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Für den Übungsschein sind mindestens 32 Punkte erforderlich. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Beantworten Sie die folgenden Fragen, und geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel (ohne Begründung) an, wenn die Antwort ja ist, oder eine kurze Begründung, wenn es keins gibt.

(a) Gibt es eine Gruppe, die auflösbar, aber weder abelsch noch einfach ist?

(b) Gibt es eine Gruppe, die einfach, aber weder abelsch noch auflösbar ist?

(c) Gibt es eine Gruppe, die abelsch, aber weder einfach noch auflösbar ist?

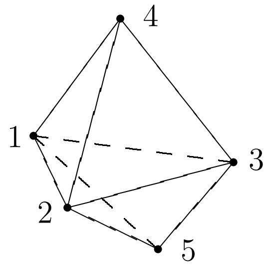
(d) Gibt es eine nicht triviale Gruppe, die abelsch und einfach und auflösbar ist?

(e) Gibt es eine Gruppe, die weder abelsch noch einfach noch auflösbar ist? *5 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Beweis für den Ihnen aus der Vorlesung bekannten Satz, daß jede Gruppe der Ordnung p^n ein nichttriviales Zentrum hat. *5 Punkte*

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99. *5 Punkte*

Aufgabe 4.



Es sei K ein Kristall, der aus zwei gleich großen Tetraedern besteht (siehe Abbildung).

(a) Bestimmen Sie die Gruppe G aller Drehungen des Raumes, die K invariant lassen, als Permutationsgruppe vom Grad 3 auf den Ecken 1, 2, 3 (durch deren Bilder jede Drehung von K offensichtlich bereits festgelegt ist), und geben Sie ihren Isomorphietyp an. Geben Sie für jede Konjugiertenklasse von G einen Repräsentanten durch Angabe der zugehörigen Drehachse und des Drehwinkels an.

(b) Es sei $r \in \mathbb{N}$. Wie viele verschiedene Färbungen der 9 Kanten von K mit r Farben gibt es? Rechnen Sie insbesondere die Werte für $r = 2$ und $r = 3$ aus. *10 Punkte*

Aufgabe 5.
Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel? (Auf die Begründung kommt es an)

(a) $5X^3 - 20$, jeweils als Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ bzw. in $\mathbb{Q}[X]$, *3 Punkte*

(b) $\frac{5}{2}X^7 - 3X^5 - \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}[X]$, *2 Punkte*

(c) $\frac{1}{5}X^3 - 25X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$. *2 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $R = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X)$. Finden Sie alle Ideale von R. Welche davon sind Primideale, welche maximal? Zeichnen Sie ein Diagramm aller Ideale von R. (Begründen Sie Ihre Ergebnisse)
7 Punkte

Aufgabe 7.
Es sei wieder $R = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X)$. Weiter sei $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\overline{f} = X^2 - 2 + (X^3 - X) \in R$. Ist $\overline{f}$ invertierbar (d. h., eine Einheit) in R? Wenn ja, berechnen Sie $\overline{f}^{-1}$. *7 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$.

(a) Was ist der Zerfällungskörper von f über K? *2 Punkte*

(b) Wann heißt f separabel über K? *2 Punkte*

Geben Sie jeweils eine vollständige Definition an.

Aufgabe 9.
Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \neq 0$ und $a \neq b$. Zeigen Sie, daß $c := \sqrt{a} + \sqrt{b}$ eine primitives Element der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \geq \mathbb{Q}$ ist, d. h., daß $\mathbb{Q}(c) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ gilt. *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$? Ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ abelsch? (begründen Sie Ihre Antworten)

(b) Geben Sie einen Unterkörper M von L mit $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ an. *10 Punkte*