1. Semesterklausur zur Algebra I (22. 12. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 7 gegebenen Aufgaben für insgesamt 44 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten, jedoch werden nur maximal 40 der erreichten Punkte auf den Übungsschein angerechnet. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $X^{\{2\}} = \{\{i, j\} \mid i, j \in X, i \neq j\}$. Die symmetrische Gruppe S_4 operiere in natürlicher Weise auf $X^{\{2\}}$.

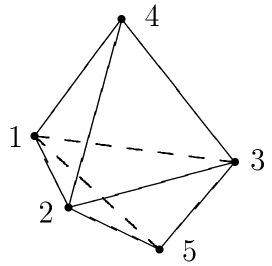
(a) Bestimmen Sie den Stabilisator von $\{1, 2\}$ in S_4.

(b) Wie viele Bahnen hat S_4 auf $X^{\{2\}}$? *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Die alternierende Gruppe A_5 operiere auf einer Menge X mit 4 Elementen. Zeigen Sie: Es gilt $g \cdot x = x$ für alle $g \in A_5$ und $x \in X$. *5 Punkte*

Aufgabe 3.
Wie viele Matrizen in $GL(3, K)$ sind ähnlich zu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, wenn K ein endlicher Körper mit q Elementen ist? *5 Punkte*

Aufgabe 4.



Es sei K ein Kristall, der aus zwei gleich großen Tetraedern besteht (siehe Abbildung).

(a) Bestimmen Sie die Gruppe G aller Drehungen des Raumes, die K invariant lassen, als Permutationsgruppe auf den Ecken 1, 2, 3 (durch deren Bilder jede Drehung von K offensichtlich bereits festgelegt ist).

(b) Es sei $r \in \mathbb{N}$. Wie viele verschiedene Färbungen der 6 Seitenflächen von K mit r Farben gibt es? Rechnen Sie insbesondere die Werte für $r = 2$ und $r = 3$ aus. *9 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei $K = \mathbb{Z}_5$ ein Körper mit 5 Elementen und G die von $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erzeugte Untergruppe von $GL(2, K)$.

(a) Berechnen Sie die Ordnung von G.
Hinweis: Zeigen Sie, daß G einen Normalteiler der Ordnung 5 besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G (Begründung!), und zeichnen Sie ein Untergruppendiagramm von G.

(c) Geben Sie für jede Klasse konjugierter Elemente von G einen Vertreter an. *9 Punkte*

Aufgabe 6.

(a) Es sei A eine abelsche Gruppe der Ordnung 8. Zeigen Sie: Die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in A ist 1 oder 3 oder 7.

(b) Schreiben Sie $\mathbb{Z}_{20}^*$ als direktes Produkt von zyklischen Gruppen. *7 Punkte*

Aufgabe 7.

Zeigen Sie (ohne Benutzung des $p^a q^b$–Satzes von Burnside): Jede Gruppe der Ordnung 80 ist auflösbar. *5 Punkte*
