Gruppe A

Nachholklausur, 4.4.2002

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?	
	Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$, dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = AT$.	☐ Ja ☐ Nein
	Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
2	Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $1 \leq \dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Für jedes $a \in K$ gibt es einen Endomorphismus von V mit Eigenwert a.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls $K = \mathbb{R}$ und $n = 6$ ist, so hat φ einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist 0 einziger Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper und $M, N \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Einträge der Matrix M seien mit $m_{i,j}$ für ($1 \leq i, j \leq n$) bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?	
	Ist M eine untere Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante von M gleich dem Produkt der Diagonalelemente.	☐ Ja ☐ Nein
	Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M auch entweder 0 oder 1.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist eine Zeile von N das Negative einer anderen Zeile von N, dann ist $\det N = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?	
	Wenn es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	$Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) + 1 = \operatorname{rang}(A, b)$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann gibt es $c \in K^{m\times 1}$, so dass $Ax = c$ unlösbar ist.	☐ Ja ☐ Nein
5	Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist X linear abhängig, so ist auch Y linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist X eine Basis von V, so ist auch Y eine Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn X eine Basis von $\langle X\rangle$ ist, so gibt es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$, die eine Basis von $\langle Y\rangle$ ist.	☐ Ja ☐ Nein

6	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?		
	Kern $\psi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	☐ Ja	☐ Nein
	Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	☐ Ja	☐ Nein
	Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	☐ Ja	☐ Nein
7	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?		
	Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist $X - 1$.	☐ Ja	☐ Nein
	Das Minimalpolynom einer Matrix ist irreduzibel.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
8	Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W **linear** ist.		
	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 2x + 1$	☐ Ja	☐ Nein
	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$	☐ Ja	☐ Nein
	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f + f$	☐ Ja	☐ Nein
	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1, 2) \cdot M$	☐ Ja	☐ Nein

Nachholklausur, WS 2001, 4.4.2002, **Gruppe A**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Es sei $2 \le n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Das Minimalpolynom μ_A von A sei gleich $\prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ und es gelte $\alpha_i \ne \alpha_j$ für $i \ne j$ und $\alpha_i^{n_i} = 1$ für gewisse $1 \le n_i \in \mathbb{N}$ und alle $1 \le i \le k$. Zeigen Sie, dass es ein $1 \le m \in \mathbb{N}$ gibt, für das $A^m = E_n$ ist. *(5 Punkte)*

10 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für ein $1 \le n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $f, g \in K[X]$ zwei Polynome. Zeigen Sie, dass die Matrizen $f(A)$ und $g(A)$ vertauschbar sind, dass also

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(a)$$

ist. *(5 Punkte)*

11 Es sei $2 \le n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Determinante $\det A \in \mathbb{Z}$ ungleich 0 ist. Zeigen Sie, dass dann Zahlen $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $1 \le i, j \le n$ existieren mit $c_{ij} \mid \det A$, so dass $A^{-1} = (b_{ij}/c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ gilt. *(5 Punkte)*

12 Es sei $1 \le n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^3 = E_n$.
Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. *(5 Punkte)*

13 Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$ der Körper mit 3 Elementen. Invertieren Sie die folgende Matrix mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren. Dokumentieren Sie genau, was Sie tun.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)