

Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

| | | | |
|---|--|-----------------------------|-------------------------------|
| 1 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für beliebige Mengen A, B und C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Wenn für zwei Mengen A und B gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Wenn für drei Mengen A, B und C gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 2 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Abbildung $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{Pot}(\{1, 2, 3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Abbildung $h : \{2, 3, 5\} \times \{5, 7, 11\} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 3 | Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | f ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jede Faser von f hat unendlich viele Elemente. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 4 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 5 | Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U und W Untervektorräume von V . Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Falls $W \subseteq U$ ist, so ist W ein Untervektorraum von U . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

| | | | |
|---|--|-----------------------------|--|
| 6 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist M eine endliche Menge, dann hat jede Partition von M höchstens so viele Teile wie M Elemente hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen 1 und 2 im selben Teil liegen, ist 8. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $f : M \rightarrow N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen M und N , dann bilden die Fasern von f eine Partition von M . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 7 | In dieser Aufgabe sei K ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $A \in K^{n \times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m \times m}$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $A \in K^{1 \times 16}$ und $B \in K^{17 \times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau 16 Zeilen und genau 17 Spalten. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Sind A und B invertierbare Matrizen aus $K^{12 \times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| 8 | In dieser Aufgabe sei K ein Körper und $\varphi : V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten K -Vektorräumen V und W . Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $B \subseteq W$ eine Basis von W und ist φ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| | Ist (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von V , dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau 3 Elemente und ist eine Basis von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist φ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

| | |
|----|--|
| 9 | <p>Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:</p> $\begin{aligned}x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$ <p style="text-align: right;"><i>(4 Punkte)</i></p> |
| 10 | <p>Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix</p> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$ <p>Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. <i>(3 Punkte)</i></p> |
| 11 | <p>Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$. Beweisen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. <i>(5 Punkte)</i></p> |
| 12 | <p>Es sei</p> $\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Q}^{2 \times 2} &\longrightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2} \\ A &\longmapsto A + A^t.\end{aligned}$ <p>Zeigen Sie:</p> <p>(i) φ ist eine \mathbb{Q}-lineare Abbildung. <i>(2 Punkte)</i></p> <p>(ii) Kern $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid a = d = 0 \text{ und } b = -c \right\}$. <i>(2 Punkte)</i></p> <p>(iii) Bild $\varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$. <i>(2 Punkte)</i></p> |
| 13 | <p>Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ Elemente des \mathbb{Q}-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:</p> <p>(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$. <i>(1 Punkte)</i></p> <p>(ii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. <i>(2 Punkte)</i></p> <p>(iii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. <i>(2 Punkte)</i></p> <p>(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Die Abbildung $\varphi : L \rightarrow M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. <i>(2 Punkte)</i></p> <p>Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ ein Ring ist.</p> |

Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

| | | | |
|---|--|-----------------------------|-------------------------------|
| 1 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 2 | Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | f ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Jede Faser von f hat unendlich viele Elemente. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 3 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Abbildung $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{Pot}(\{1, 2, 3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Abbildung $h : \{2, 3, 5\} \times \{5, 7, 11\} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 4 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für beliebige Mengen A, B und C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Wenn für zwei Mengen A und B gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Wenn für drei Mengen A, B und C gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 5 | In dieser Aufgabe sei K ein Körper und $\varphi : V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten K -Vektorräumen V und W . Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $B \subseteq W$ eine Basis von W und ist φ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von V , dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau 3 Elemente und ist eine Basis von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist φ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

| | | | |
|---|--|--|--|
| 6 | In dieser Aufgabe sei K ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $A \in K^{n \times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m \times m}$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $A \in K^{1 \times 16}$ und $B \in K^{17 \times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau 16 Zeilen und genau 17 Spalten. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Sind A und B invertierbare Matrizen aus $K^{12 \times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| 7 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist M eine endliche Menge, dann hat jede Partition von M höchstens so viele Teile wie M Elemente hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen 1 und 2 im selben Teil liegen, ist 8. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| | Ist $f : M \rightarrow N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen M und N , dann bilden die Fasern von f eine Partition von M . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| 8 | Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U und W Untervektorräume von V . Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| | $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V . | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| | Falls $W \subseteq U$ ist, so ist W ein Untervektorraum von U . | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

| | |
|----|--|
| 9 | <p>Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:</p> $\begin{aligned}x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$ <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p> |
| 10 | <p>Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix</p> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$ <p>Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. (3 Punkte)</p> |
| 11 | <p>Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$. Beweisen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. (5 Punkte)</p> |
| 12 | <p>Es sei</p> $\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Q}^{2 \times 2} &\longrightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2} \\ A &\longmapsto A + A^t.\end{aligned}$ <p>Zeigen Sie:</p> <p>(i) φ ist eine \mathbb{Q}-lineare Abbildung. (2 Punkte)</p> <p>(ii) Kern $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid a = d = 0 \text{ und } b = -c \right\}$. (2 Punkte)</p> <p>(iii) Bild $\varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$. (2 Punkte)</p> |
| 13 | <p>Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ Elemente des \mathbb{Q}-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:</p> <p>(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$. (1 Punkte)</p> <p>(ii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. (2 Punkte)</p> <p>(iii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. (2 Punkte)</p> <p>(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Die Abbildung $\varphi : L \rightarrow M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. (2 Punkte)</p> <p>Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ ein Ring ist.</p> |