Gruppe A

Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Für beliebige Mengen A, B und C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Wenn für zwei Mengen A und B gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Wenn für drei Mengen A, B und C gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Die Abbildung $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $g : \{1,2,3\} \to \mathrm{Pot}(\{1,2,3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Die Abbildung $h : \{2,3,5\} \times \{5,7,11\} \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
3	Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	f ist surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	$f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Jede Faser von f hat unendlich viele Elemente.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
4	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
5	Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U und W Untervektorräume von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	$U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Falls $W \subseteq U$ ist, so ist W ein Untervektorraum von U.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

6	Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist M eine endliche Menge, dann hat jede Partition von M höchstens so viele Teile wie M Elemente hat.	☐ Ja	☐ Nein
	Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen 1 und 2 im selben Teil liegen, ist 8.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen M und N, dann bilden die Fasern von f eine Partition von M.	☐ Ja	☐ Nein
7	In dieser Aufgabe sei K ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist $A \in K^{n \times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m \times m}$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $A \in K^{1 \times 16}$ und $B \in K^{17 \times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau 16 Zeilen und genau 17 Spalten.	☐ Ja	☐ Nein
	Sind A und B invertierbare Matrizen aus $K^{12 \times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix.	☐ Ja	☐ Nein
8	In dieser Aufgabe sei K ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten K-Vektorräumen V und W. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $B \subseteq W$ eine Basis von W und ist φ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von V.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von V, dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau 3 Elemente und ist eine Basis von V.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist φ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$.	☐ Ja	☐ Nein

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

10 Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. *(3 Punkte)*

11 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$.
Beweisen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*

12 Es sei

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Q}^{2\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{2\times 2} \\ & A & \longmapsto & A + A^t \end{array}.$$

Zeigen Sie:

(i) φ ist eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. *(2 Punkte)*

(ii) Kern $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \,\middle|\, a = d = 0 \quad \text{und} \quad b = -c \right\}$. *(2 Punkte)*

(iii) Bild $\varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A = A^t\}$. *(2 Punkte)*

13 Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:

(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$. *(1 Punkte)*

(ii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. *(2 Punkte)*

(iii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. *(2 Punkte)*

(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.
Die Abbildung $\varphi : L \to M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. *(2 Punkte)*

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ein Ring ist.

Gruppe B

Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
2	Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	f ist surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	$f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Jede Faser von f hat unendlich viele Elemente.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
3	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $g : \{1, 2, 3\} \to \text{Pot}(\{1, 2, 3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Die Abbildung $h : \{2, 3, 5\} \times \{5, 7, 11\} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
4	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Für beliebige Mengen A, B und C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Wenn für zwei Mengen A und B gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Wenn für drei Mengen A, B und C gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
5	In dieser Aufgabe sei K ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten K-Vektorräumen V und W. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Ist $B \subseteq W$ eine Basis von W und ist φ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von V.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ist (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von V, dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau 3 Elemente und ist eine Basis von V.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Ist φ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

6	In dieser Aufgabe sei K ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist $A \in K^{n\times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m\times m}$.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	Ist $A \in K^{1\times 16}$ und $B \in K^{17\times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau 16 Zeilen und genau 17 Spalten.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	Sind A und B invertierbare Matrizen aus $K^{12\times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix.	$\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
7	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist M eine endliche Menge, dann hat jede Partition von M höchstens so viele Teile wie M Elemente hat.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen 1 und 2 im selben Teil liegen, ist 8.	$\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ist $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen M und N, dann bilden die Fasern von f eine Partition von M.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
8	Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U und W Untervektorräume von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	$U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V.	$\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Falls $W \subseteq U$ ist, so ist W ein Untervektorraum von U.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 \quad &= 1 \\ x_2 + x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

10 Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. *(3 Punkte)*

11 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$.
Beweisen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*

12 Es sei

$$\begin{aligned} \varphi \;:\; \mathbb{Q}^{2\times 2} &\longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2} \\ A &\longmapsto A + A^t \end{aligned}.$$

Zeigen Sie:

(i) φ ist eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. *(2 Punkte)*

(ii) $\operatorname{Kern} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \;\middle|\; a = d = 0 \quad \text{und} \quad b = -c \right\}$. *(2 Punkte)*

(iii) $\operatorname{Bild} \varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A = A^t\}$. *(2 Punkte)*

13 Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:

(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$. *(1 Punkte)*

(ii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. *(2 Punkte)*

(iii) L mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. *(2 Punkte)*

(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Die Abbildung $\varphi : L \to M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. *(2 Punkte)*

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ein Ring ist.