25.3.2002

Vordiplomsklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Rech	11	12	13	14	Σ	Zensur	Zus.Prüf.	Gesamt
Punkte										
Nachk.										

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zu den Rechenaufgaben:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Klausureinsicht: ______________________________
(Eigenhändige Unterschrift)

Gruppe A

Vordiplomsklausur, Ankreuzteil, 25.3.2002

Lineare Algebra I, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ____________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat höchstens eine Lösung.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau einer Lösung hat mindestens so viele Gleichungen wie Unbekannte.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens zwei verschiedene Lösungen.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
2	Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi: V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Weiter seien $X \subseteq V$ und $Y \subseteq W$ endliche Teilmengen. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Falls φ injektiv ist und X linear unabhängig ist, so ist $\varphi(X)$ auch linear unabhängig und hat genau so viele Elemente wie X.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Falls φ surjektiv ist, sowie $Y = \varphi(X)$ und Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Falls X und Y linear unabhängig sind und X und Y gleich viele Elemente besitzen, so gibt es eine lineare Abbildung $\psi: V \to W$ mit $\psi(X) = Y$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
3	Sind die folgenden Aussagen über Untervektorräume richtig?	
	Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden die Polynome vom Grad $\leq n$ zusammen mit dem Nullpolynom einen K-Untervektorraum des Polynomringes $K[X]$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Für einen Körper K und $n, m \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge der Matrizen in $K^{n\times m}$, deren Einträge die Summe Null haben, ein Untervektorraum von $K^{n\times m}$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
4	Es seien K ein Körper und $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

5	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Dann gilt $\det(A) = \det(A^{-1})$.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det(A)$ in K invertierbar ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$. Falls $\det(A(B+C)) \neq 0$ ist, so ist mindestens eine der Matrizen B oder C invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
6	Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Falls n ungerade ist und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, so besitzt A einen Eigenwert in $\mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Weiter sei v ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $a \in K$ und w ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $b \in K$ und $v \neq w$. Genau dann ist $v - w$ auch ein Eigenvektor von A, wenn $a = b$ gilt.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und v Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Dann ist $-v$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-a$.	☐ Ja ☐ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Vordiplomsklausur, 25.3.2002, Rechenteil, **Gruppe A**

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

7 Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ durch

$$\varphi(A) := A + 2 \cdot A^t.$$

gegeben. Berechnen Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

(1 Punkt pro richtiger Spalte: insgesamt 4 Punkte)

8 Es sei $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der Körper mit 5 Elementen und $A \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$ und $b \in \mathbb{F}_5^{4\times 1}$ gegeben durch:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $x \in \mathbb{F}_5^{4\times 1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte für A^{-1} und 1 Punkt für x: insgesamt 5 Punkte)

9	Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die folgende geordnete Basis von V: $$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$ Geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von V an für die gilt: $\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle$ und $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$. $$w_1 = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \end{pmatrix}$$ *(1 Punkt pro richtiger Spalte: insgesamt 3 Punkte)*
10	Es sei $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ die folgende Matrix: $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 1 \\ -7 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -47 & 4 \end{pmatrix}.$$ (i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A: $\boxed{\chi_A = \qquad\qquad}$ *(2 Punkte)* (ii) Geben Sie die Eigenwerte von A an: Eigenwerte von A: *(1 Punkt)* (iii) Geben Sie die Dimensionen der Eigenräume an: Dimensionen der Eigenräume von A: *(2 Punkte)*

Vordiplomsklausur, 25.3.2002, schriftlicher Teil, **Gruppe A**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
11	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $v \in K^{n\times 1}$ ein Spaltenvektor ungleich 0. Weiter sei $A := v \cdot v^t$. Zeigen Sie, dass A den Eigenwert 0 hat. Welche Dimension hat der Eigenraum von A zum Eigenwert 0? *(4 Punkte)*
12	Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage? Für alle $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ gilt $A \cdot A^t = A^t \cdot A$. Vergessen Sie nicht die Begründung. *(4 Punkte)*
13	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $f \in K[X]$ gibt, so dass $f(A) = A^{-1}$ ist. *(4 Punkte)*
14	Es sei K ein Körper, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass dann für jedes Polynom $f \in K[X]$ die Matrix $f(A)$ auch diagonalisierbar ist. *(3 Punkte)*

Gruppe B

Vordiplomsklausur, Ankreuzteil, 25.3.2002

Lineare Algebra I, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Dann gilt $\det(A) = \det(A^{-1})$.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det(A)$ in K invertierbar ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B, C \in K^{n \times n}$. Falls $\det(A(B + C)) \neq 0$ ist, so ist mindestens eine der Matrizen B oder C invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
2	Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Falls n ungerade ist und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist, so besitzt A einen Eigenwert in $\mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Weiter sei v ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $a \in K$ und w ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $b \in K$ und $v \neq w$. Genau dann ist $v - w$ auch ein Eigenvektor von A, wenn $a = b$ gilt.	☐ Ja ☐ Nein
	Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und v Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Dann ist $-v$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-a$.	☐ Ja ☐ Nein
3	Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Weiter seien $X \subseteq V$ und $Y \subseteq W$ endliche Teilmengen. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Falls φ injektiv ist und X linear unabhängig ist, so ist $\varphi(X)$ auch linear unabhängig und hat genau so viele Elemente wie X.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls φ surjektiv ist, sowie $Y = \varphi(X)$ und Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls X und Y linear unabhängig sind und X und Y gleich viele Elemente besitzen, so gibt es eine lineare Abbildung $\psi : V \to W$ mit $\psi(X) = Y$.	☐ Ja ☐ Nein
4	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat höchstens eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau einer Lösung hat mindestens so viele Gleichungen wie Unbekannte.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens zwei verschiedene Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein

5	Sind die folgenden Aussagen über Untervektorräume richtig?	
	Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden die Polynome vom Grad $\leq n$ zusammen mit dem Nullpolynom einen K-Untervektorraum des Polynomringes $K[X]$.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	Für einen Körper K und $n, m \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge der Matrizen in $K^{n\times m}$, deren Einträge die Summe Null haben, ein Untervektorraum von $K^{n\times m}$.	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
6	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	$\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	$\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	$\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Vordiplomsklausur, 25.3.2002, Rechenteil, **Gruppe B**

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

7 Es sei $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ der Körper mit 5 Elementen und $A \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$ und $b \in \mathbb{F}_5^{4\times 1}$ gegeben durch:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $x \in \mathbb{F}_5^{4\times 1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte für A^{-1} und 1 Punkt für x: insgesamt 5 Punkte)

8 Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ durch

$$\varphi(A) := A + 2 \cdot A^t.$$

gegeben. Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

(1 Punkt pro richtiger Spalte: insgesamt 4 Punkte)

9	Es sei $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ die folgende Matrix: $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 1 \\ -7 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -47 & 4 \end{pmatrix}.$$ (i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A: $\chi_A =$ *(2 Punkte)* (ii) Geben Sie die Eigenwerte von A an: Eigenwerte von A: *(1 Punkt)* (iii) Geben Sie die Dimensionen der Eigenräume an: Dimensionen der Eigenräume von A: *(2 Punkte)*
10	Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die folgende geordnete Basis von V: $$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$ Geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von V an für die gilt: $\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle$ und $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$. $$w_1 = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$$ *(1 Punkt pro richtiger Spalte: insgesamt 3 Punkte)*

Vordiplomsklausur, 25.3.2002, schriftlicher Teil, **Gruppe B**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
11	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $v \in K^{n\times 1}$ ein Spaltenvektor ungleich 0. Weiter sei $A := v \cdot v^t$. Zeigen Sie, dass A den Eigenwert 0 hat. Welche Dimension hat der Eigenraum von A zum Eigenwert 0? *(4 Punkte)*
12	Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage? Für alle $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ gilt $A \cdot A^t = A^t \cdot A$. Vergessen Sie nicht die Begründung. *(4 Punkte)*
13	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $f \in K[X]$ gibt, so dass $f(A) = A^{-1}$ ist. *(4 Punkte)*
14	Es sei K ein Körper, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass dann für jedes Polynom $f \in K[X]$ die Matrix $f(A)$ auch diagonalisierbar ist. *(3 Punkte)*