

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06, 1. Teil

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Eigenhändige Unterschrift: _____

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.

Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Scheinklausur 1. Teil, 16.12.2005

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über \mathbb{Q} mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe.	
	Ist $\overline{21}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\overline{3}^{2005} = \overline{3}^{2001}$ in $\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Einheit. Ist dann auch a^3 eine Einheit?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen für alle Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ richtig?	
	Wenn $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ ist, dann gilt $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ ist, dann ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ ist, dann existiert ein $a \in K$ mit $a \cdot v_1 = v_2$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \rightarrow W$ und $\psi : W \rightarrow V$ lineare Abbildungen zwischen den K -Vektorräumen V und W . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?	
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq \text{Bild } \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq \text{Kern } \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq \text{Kern } \varphi \circ \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	f ist surjektiv genau dann, wenn f keine leeren Fasern hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	f ist injektiv genau dann, wenn jede Faser genau ein Element hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	f ist bijektiv genau dann, wenn jede Faser mindestens ein Element hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen: (je 1 Punkt)</p> <p>(a) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$ (b) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$ (c) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (d) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (e) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (f) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$</p> <p>(a) <input type="text"/> (b) <input type="text"/> (c) <input type="text"/> (d) <input type="text"/> (e) <input type="text"/> (f) <input type="text"/></p>
7	<p>Bestimmen Sie eine Matrix $N \in \mathbb{Z}^{2 \times 4}$, für die $MN = P$ gilt mit den folgenden Matrizen M und P: (4 Punkte)</p> $M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad P := \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 4}$ <p style="text-align: right;">$N :$ <input style="width: 150px; height: 80px;" type="text"/></p>
8	<p>Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5 \times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4 \times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4 \times 1}$ die folgenden sind: (6 Punkte)</p> $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: right;">Ergebnis: <input style="width: 150px; height: 80px;" type="text"/></p>
<p>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.</p>	
9	<p>Eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A = A^t$ ist. Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n \times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass AB genau dann gleich BA ist, wenn AB symmetrisch ist. (6 Punkte)</p>
10	<p>Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Q}^{n \times n}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n \times n} \mid AX = XA \text{ für alle } X \in \mathcal{M}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n \times n}$ ist. (4 Punkte)</p>
11	<p>Es sei $A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2}, X \mapsto AX + XA$.</p> <p>(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (1 Punkt) (b) Bestimmen Sie den Kern von φ. (2 Punkte) (c) Bestimmen Sie das Bild von φ. (2 Punkte)</p>
12	<p>Es seien M, N und S nicht-leere Mengen und $\varphi : M \rightarrow N$ und $\psi : N \rightarrow S$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:</p> <p>(a) Sind φ und ψ injektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv. (1 Punkt) (b) Ist φ injektiv und ψ surjektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv. (1 Punkt) (c) Sind φ und ψ surjektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv. (1 Punkt) (d) Ist φ surjektiv und ψ injektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ injektiv. (1 Punkt)</p>

Scheinklausur 1. Teil, 16.12.2005

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	f ist injektiv genau dann, wenn jede Faser genau ein Element hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	f ist bijektiv genau dann, wenn jede Faser mindestens ein Element hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	f ist surjektiv genau dann, wenn f keine leeren Fasern hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen für alle Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ richtig?	
	Wenn $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ ist, dann ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ ist, dann gilt $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ ist, dann existiert ein $a \in K$ mit $a \cdot v_1 = v_2$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe.	
	Ist $\bar{3}^{2005} = \bar{3}^{2001}$ in $\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Einheit. Ist dann auch a^3 eine Einheit?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\bar{21}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über \mathbb{Q} mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \rightarrow W$ und $\psi : W \rightarrow V$ lineare Abbildungen zwischen den K -Vektorräumen V und W . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?	
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern ψ	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild ψ	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern $\varphi \circ \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Bestimmen Sie eine Matrix $N \in \mathbb{Z}^{2 \times 4}$, für die $MN = P$ gilt mit den folgenden Matrizen M und P: (4 Punkte)</p> $M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad P := \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 4}$ <p style="text-align: right;">N : <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table></p>								
7	<p>Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5 \times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4 \times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4 \times 1}$ die folgenden sind: (6 Punkte)</p> $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: right;">Ergebnis: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 50px; height: 50px;"></td></tr></table></p>								
8	<p>Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen: (je 1 Punkt)</p> <p>(a) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$ (b) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$ (c) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (d) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (e) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ (f) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$</p> <p>(a) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table> (b) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table> (c) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table> (d) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table> (e) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table> (f) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table></p>								
<p>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.</p>									
9	<p>Eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A = A^t$ ist. Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n \times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass AB genau dann gleich BA ist, wenn AB symmetrisch ist. (6 Punkte)</p>								
10	<p>Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Q}^{n \times n}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n \times n} \mid AX = XA \text{ für alle } X \in \mathcal{M}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n \times n}$ ist. (4 Punkte)</p>								
11	<p>Es sei $A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2}, X \mapsto AX + XA$.</p> <p>(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (1 Punkt) (b) Bestimmen Sie den Kern von φ. (2 Punkte) (c) Bestimmen Sie das Bild von φ. (2 Punkte)</p>								
12	<p>Es seien M, N und S nicht-leere Mengen und $\varphi : M \rightarrow N$ und $\psi : N \rightarrow S$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:</p> <p>(a) Sind φ und ψ injektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv. (1 Punkt) (b) Ist φ injektiv und ψ surjektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv. (1 Punkt) (c) Sind φ und ψ surjektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv. (1 Punkt) (d) Ist φ surjektiv und ψ injektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ injektiv. (1 Punkt)</p>								