Klausur, 27.07.2010

Lineare Algebra I, SS 2010, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ____________________

	Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.
1	Es sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi((v_1, \ldots, v_n)^t) = (w_1, \ldots, w_n)^t$, wobei $w_i = v_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und $w_n = 0$ ist. (a) Geben Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ an. *($1+1$ Punkte)* $\chi_\varphi = \boxed{}$ $\mu_\varphi = \boxed{}$ (b) Geben Sie die Eigenwerte von φ an. $\boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)*
2	Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^5$ mit $Ax = b$ an, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^4$ die folgenden sind: *(5 Punkte)* $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ergebnis: $\boxed{}$

3	Es sei $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(A) = XAX$ für alle $A \in V$. (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{S} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an. *(4 Punkte)* $\mathrm{M}_{\mathcal{S}}(\varphi) =$ (b) Geben Sie den Rang von φ an. $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{B} =$
4	Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben. (a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)* $x_1 = (0, 1, 0)^t, \quad x_2 = (1, 0, 1)^t, \quad x_3 = (0, 1, 1)^t$ *in der gegebenen Reihenfolge* mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$ von $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{O} =$ (b) Gegeben seien $u = (1, 1, 1)^t$ und $v = (-1, 1, 0)^t$ aus $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Koordinatenvektoren von u und v bezüglich $\mathcal{O}$ aus (a) an: $\kappa_{\mathcal{O}}(u) = \boxed{}$ und $\kappa_{\mathcal{O}}(v) = \boxed{}$. *($2 + 2$ Punkte)*

Name:________________________ Matrikelnummer:________________________

5	Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $$A_a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & a-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix}.$$ (a) Geben Sie die Determinante von A_a an. *(1 Punkt)* (b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? *(1 Punkt)* (c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist A invertierbar und $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? *(1 Punkt)* (d) Es sei $a = 3$. Geben Sie die Eigenwerte von A_3 an. *(1 Punkt)* (e) Es sei $a = 3$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_3 an. *(3 Punkte)* .
Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
6	Es seien $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ definiert durch $$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^t && \text{für } A \in V, \\ \psi(A) &= A^t + \sqrt{2}A && \text{für } A \in V. \end{aligned}$$ (i) Beweisen Sie, dass φ und ψ diagonalisierbar sind und bestimmen Sie die Eigenwerte von φ und ψ. *(4 Punkte)* (ii) Geben Sie für $n = 2$ explizit eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von ψ besteht. *(4 Punkte)*
7	Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v, w \in V$ mit $v \neq w$. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, sodass $\varphi(v) = \varphi(w) \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass das 2-Tupel (v, w) linear unabhängig ist. *(3 Punkte)*
8	Es sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt β und $\varphi : V \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es ein $v_0 \in V$ gibt mit $\varphi(v) = \beta(v, v_0)$ für alle $v \in V$. *(5 Punkte)*
9	Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Endomorphismus φ von V mit $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$ gibt, wenn n gerade ist. *(4 Punkte)*