Nachholklausur zur Linearen Algebra I (17. 4. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 65 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Bekanntlich gilt: Ist (v_1, v_2) ein linear unabhängiges Paar von Vektoren aus V und $c \in K$, so ist auch $(v_1 + c\,v_2, v_2)$ linear unabhängig. Wie beweist man das?

(b) Wir nehmen nun an, es sei $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie: Ist $0 \neq v \in V$, so gibt es ein linear unabhängiges Paar (u, w) von Vektoren aus V mit $v = u + w$. *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 2.
Durch die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ sei eine lineare Abbildung φ von einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis $\mathcal{B}$ in einen $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit Basis $\mathcal{C}$ gegeben. Bestimmen Sie die Dimensionen der Vektorräume V, W, $\operatorname{Bild}\varphi$, $\operatorname{Kern}\varphi$, $W/\operatorname{Bild}\varphi$ und $V/\operatorname{Kern}\varphi$, und erläutern Sie dabei jeweils Ihre Rechnung. *6 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $V = \mathbb{Q}^{2\times 1}$, es sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine Basis von V, und es sei φ der durch die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ gegebene Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie: φ ist ein Automorphismus von V.

(b) Wegen (a) ist $\mathcal{C} = (\varphi(v_2), \varphi(v_1))$ eine Basis von V. Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$.

(d) Es sei $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \in V$. Welchen Koordinatenvektor hat der Vektor $\varphi(v)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$? (Antwort mit Begründung.) *2 + 4 + 2 + 2 = 10 Punkte*

Aufgabe 4.
Über dem Körper $\mathbb{Q}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2\,x_1 & +\,4\,x_2 & & +\,x_4 & & = & 5 \\ x_1 & +\,2\,x_2 & +\,x_3 & +\,x_4 & -\,x_5 & = & 2 \\ x_1 & +\,2\,x_2 & -\,x_3 & & +\,x_5 & = & 3 \end{array}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus aus der Vorlesung

(a) eine Basis für den Lösungsraum L des zugehörigen homogenen Systems,

(b) die Menge M aller Lösungen des inhomogenen Systems. *zusammen 5 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei $V < \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3. In V seien die Teilräume

$$U = \langle\, X^3 - 9X + 11,\ X^3 + X^2 - 6X + 8,\ X^3 + 2X^2 - 3X + 5\,\rangle \quad \text{und}$$
$$W = \langle\, X^3 + X^2 + 2X + 1,\ X^3 - X^2 + 4X\,\rangle$$

gegeben. Berechnen Sie eine Basis von $U \cap W$ und eine Basis von $U + W$.

Erläutern Sie Ihre Rechnung (und vergewissern Sie sich am Schluß, daß die Basen, die Sie angeben, tatsächlich aus Polynomen bestehen). *5 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie A^{-1} mit dem üblichen Verfahren (also mit Hilfe elementarer Umformungen).

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte, ohne irgendwelche Eigenvektoren zu berechnen. (Mit Beweis.)

(d) Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ mit der Eigenschaft $A^{-1} = f(A)$, und berechnen Sie damit noch einmal A^{-1}, ohne (a) zu benutzen.

(e) Es sei $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix. Beweisen Sie, ohne $\tilde{A}$ auszurechen, daß $\tilde{A} = -A^{-1}$ ist.

(f) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton und ohne irgendwelche Potenzen von A als Matrizen auszurechnen, daß A^4 gleich der Einheitsmatrix E_3 ist.

3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 16 Punkte

Aufgabe 7.
Es sei $V = \mathbb{R}[X]$, und es sei $\varphi\colon V \to V$ der durch $\varphi(f) = Xf'$ für $f \in V$ definierte Endomorphismus von V, wobei f' die formale Ableitung von f bedeutet, also

$$f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \quad \text{für} \quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in V.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von φ.

Bei dieser Aufgabe, bei der kaum etwas zu rechnen ist, kommt es auf eine ausführliche und vollständige Argumentation an. Sie sollen hier zeigen, daß Sie mathematische Zusammenhänge sauber formulieren können. (Hinweis: Es kommt kein Induktionsbeweis vor.) *9 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei K ein Körper und $a, b \in K$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrizen $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ sind nicht ähnlich. (Hinweis: Bestimmen Sie etwa alle zu A ähnlichen Matrizen.)

(b) Die Matrizen $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ und $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ sind ähnlich. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß C diagonalisierbar ist.) *4 + 4 = 8 Punkte*
