Scheinklausur zur Linearen Algebra I (13. 2. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 54 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W, eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie: Ist $v_1 \neq v_2$ und $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, so ist (v_1, v_2) linear unabhängig. *5 Punkte*

Aufgabe 2.

Es seien U und W zwei 3-dimensionale Teilräume eines 4-dimensionalen Vektorraums. Welche Dimension hat $U \cap W$ mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie ein konkretes Beispiel für diesen Fall an.

3 Punkte

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{F}_2^{25\times 1}$. Welche der beiden folgenden Teilmengen von V sind Teilräume?

(a) $G = \{v \in V \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } v \text{ ist gerade}\}$,

(b) $U = \{v \in V \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } v \text{ ist ungerade}\}$.

Empfehlung: Nicht lange rechnen, sondern kurz umformulieren und beweisen. *4 Punkte*

Aufgabe 4.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ seien die Teilräume

$$U = \langle [1,2,1,4], [-1,3,4,1], [1,-1,-2,1] \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle [1,1,4,1], [1,2,3,3] \rangle$$

gegeben. Berechnen Sie

(a) je eine Basis für U und V/U,

(b) je eine Basis für $U \cap W$ und $U + W$.

Erläutern Sie jeweils die Rechnung, und geben Sie die Basen konkret an. *4 + 4 = 8 Punkte*

Aufgabe 5.

In $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ seien die Basen $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ und $\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}\}$, der Vektor $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und die durch $\varphi(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a \end{bmatrix}$ definierte lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ gegeben. Bestimmen Sie

(a) die Basiswechselmatrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$,

(b) die Abbildungsmatrizen $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$,

(c) den Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(v))$. *3 + 3 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabe 6.
Untersuchen Sie jeweils für $n = 2^{20}$ und für $n = 2^{25}$, ob es ein nicht homogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten über einem geeigneten Körper K gibt, das genau n Lösungen hat. (Sie dürfen verwenden, daß es zu jeder Primzahlpotenz q einen Körper mit q Elementen gibt.)

Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel oder einen Gegenbeweis an. *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Gegeben sei die invertierbare Matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit der Eigenschaft $A^{-1} = f(A)$, und berechnen Sie damit die Matrix A^{-1}.

(b) Es sei $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix. Berechnen Sie $\tilde{A}$ mit möglichst geringem Aufwand. (Erläutern Sie die Rechnung.) *5 + 2 = 7 Punkte*

Aufgabe 8.
(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{bmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 6 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum. *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $V = \mathbb{R}[X]$, und es sei $\varphi\colon V \to V$ der durch $\varphi(f) = Xf'$ für $f \in V$ definierte Endomorphismus von V, wobei f' die formale Ableitung von f bedeutet, also

$$f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \quad \text{für} \quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in V.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von φ.

Bei dieser Aufgabe, bei der kaum etwas zu rechnen ist, kommt es auf eine ausführliche und vollständige Argumentation an. Sie sollen hier zeigen, daß Sie mathematische Zusammenhänge sauber formulieren können. *9 Punkte*