1. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 88/89)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Man berechne die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbf{Z}_2$. *4 Punkte*

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2.
Es sei $\mathcal{V} = \mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathcal{V}$ sind Teilräume? (Begründung!)

1. $M_1 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(1) = f(-1)\}$ *2 Punkte*
2. $M_2 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(1) \cdot f(0) = 0\}$ *3 Punkte*
3. $M_3 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(x) = f(x + \pi) \text{ für alle } x \in \mathbf{R}\}$ *2 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $\mathcal{V} = \mathbf{R}^4$ und $M = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

1. Man berechne eine Basis von M und ergänze sie zu einer Basis von $\mathcal{V}$. *4 Punkte*
2. Man gebe eine Basis von $\mathcal{V}/M$ an. *2 Punkte*

Aufgabe 4.
Man bestimme die <u>Dimension</u> des Durchschnitts der folgenden Teilräume T_1 und T_2 von ${\mathbf{Z}_3}^4$. *4 Punkte*

$$T_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \ T_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Aufgabe 5.
Man bestimme die Dimension der folgenden Vektorräume über den angegebenen Körpern.

1. $K = \mathbf{Q}$, $\mathcal{V} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{Q}^{2\times 2}$ *2 Punkte*

2. $K = \mathbf{R}$, $\mathcal{V} = \mathrm{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *1 Punkt*

3. K ein Körper mit 9 Elementen, $\mathcal{V} = \mathrm{Abb}(K, K)$ *3 Punkte*

Aufgabe 6.

Sei $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ die lineare Abbildung mit $\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$. Man bestimme alle Elemente von $\mathbf{R}^3$, die durch φ auf $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ abgebildet werden. *3 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $\mathcal{V} = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle \leq \mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Es ist $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ (dies ist <u>nicht</u> zu zeigen!).
Für $f \in \mathcal{V}$ sei $\varphi(f) \in \mathcal{V}$ mit $\varphi(f)(x) = f(x+1) - f(x-1)$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

1. Man zeige, daß die so definierte Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear ist. *4 Punkte*

Auch für den Fall, daß man Teil **??** dieser Aufgabe nicht gelöst hat, behandele man die folgenden Punkte:

2. Man berechne die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$. *3 Punkte*

3. Man bestimme eine Basis von Kernφ *2 Punkte*

4. Man bestimme die Dimension von Bildφ. *1 Punkt*

Aufgabe 8.

Es sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbf{Q}$-Vektorraum der Dimension 3, $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Weiter sei $\mathcal{B}' = (B_1', B_2', B_3')$ mit $B_1' = -B_1 + B_2$, $B_2' = B_1 + B_2$ und $B_3' = B_2 + B_3$.
Man weise nach, daß $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist und bestimme ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$. *6 Punkte*

Aufgabe 9.

Wieviele invertierbare 3×3-Matrizen gibt es über dem Körper $\mathbf{Z}_2$? *4 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum, $\mathcal{T}$ ein Teilraum von $\mathcal{V}$, $\mathcal{T} \neq 0$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{V}$ so daß $(X_1 + \mathcal{T}, X_2 + \mathcal{T}, \ldots, X_n + \mathcal{T})$ eine Basis von $\mathcal{V}/\mathcal{T}$ ist.

1. Ist $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$? *2 Punkte*

2. Ist $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ linear unabhängig in $\mathcal{V}$? *2 Punkte*

3. Ist $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$? *1 Punkt*