2. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 88/89)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *6 Punkte*

Es sei $\mathcal{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbf{Q}$-Vektorraum, $\mathcal{T}_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathcal{V}$ und

$\mathcal{T}_2 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Man bestimme Basen von $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ und $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Aufgabe 2. *3 Punkte*

Es seien π und σ die durch $\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline i\pi & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{array}$, $\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline i\sigma & 7 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{array}$ gegebenen Permutationen auf 7 Ziffern. Man schreibe π und σ als Produkt ziffernfremder Zykel und berechne π^{11} und $\sigma^{-1} \cdot \pi \cdot \sigma$ sowie das Vorzeichen von π und σ.

Aufgabe 3. *4 Punkte*

Es sei π eine Permutation auf n Ziffern, K ein Körper und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$ mit $a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad j \neq i\pi \\ 1 & \text{falls} \quad j = i\pi \end{cases}$.

Man zeige mit Hilfe der Summen- Produktformel für Determinanten, daß $\det A = \varepsilon(\pi)$ gilt, wobei $\varepsilon(\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π ist.

Aufgabe 4. *3 Punkte*

Es sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl und $A \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot A^{tr} = I_n$ (Einheitsmatrix). Man zeige: $\det A \in \{1, -1\}$.

Aufgabe 5. *4 Punkte*

Man berechne die Determinante der folgenden rationalen Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 28 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. *3 Punkte*

Es sei $\mathcal{V}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $X \in \mathcal{V}$, $X \neq 0$. Man zeige, daß es ein $\varphi \in \mathcal{V}^*$ gibt mit $\mathcal{V} = \langle X \rangle \oplus \text{Kern}\varphi$.

Aufgabe 7. *4 Punkte*
Es sei $\mathcal{V} = \mathbf{R}[x]_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Es ist $\mathcal{B} := (1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Man bestimme die Koordinaten einer Basis des Annihilators von $\langle 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x^3 \rangle$ im Dualraum $\mathcal{V}^*$ bezüglich der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Aufgabe 8.
Es sei $\mathcal{V}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K, φ ein Endomorphismus von $\mathcal{V}$, $X \in \mathcal{V}$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $c \in K$ (insbesondere gilt $X \neq 0$!).

1. Es sei $\psi := \varphi - a \cdot id$ mit $a \in K$. *2 Punkte*
   Man zeige, daß X auch ein Eigenvektor von ψ ist.

2. Man zeige: Ist φ invertierbar, so ist $c \neq 0$. *1 Punkte*

3. Man zeige: Ist φ invertierbar, so ist X auch ein Eigenvektor von φ^{-1}.
   Man gebe den zugehörigen Eigenwert an. *2 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $\mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$.

1. Man bestimme die Eigenwerte von A. *4 Punkte*

2. Man benutze 1. um A^{1989} zu bestimmen. *3 Punkte*

Aufgabe 10. *7 Punkte*
Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines 4-dimensionalen Vektorraums $\mathcal{V}$ über $\mathbf{Q}$,

φ ein Endomorphismus von $\mathcal{V}$ mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Man bestimme die Basiswechselmatrix zu einer Fächerbasis $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{V}$ bzgl. φ.

Aufgabe 11.
Es sei $\mathcal{V} := \mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ definiert durch

$$\Phi(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \text{ für } f, g \in \mathcal{V} \enspace .$$

1. Man zeige: Φ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$. *2 Punkte*

2. Man bestimme das Radikal von Φ. *2 Punkte*

3. Es sei $\mathcal{W}$ der Teilraum von $\mathcal{V}$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich 2. Man bestimme den Orthogonalraum von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$. *2 Punkte*

4. Sei $\mathcal{W}$ wie oben und $\Psi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to K$ die Einschränkung von Φ auf $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$.
   Man zeige: Ψ ist nicht ausgeartet. *2 Punkte*