Nachholklausur zur Linearen Algebra I Teil 2
(20. 4. 93)

Lesezeit: 15 Minuten — Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Beweisen Sie: Jedes homogene oder inhomogene lineare Gleichungssystem über einem beliebigen Körper K mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten hat entweder keine Lösung oder mindestens 2 Lösungen. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei π die durch $\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline i\pi & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{array}$ gegebene Permutationen auf 9 Ziffern.

a) Schreiben Sie π als Produkt von ziffernfremden Zykeln. *1 Punkt*

b) Schreiben Sie π als Produkt von Zweierzykeln (Transpositionen). *2 Punkte*

c) Schreiben Sie π^2 als Produkt von Dreierzykeln. *1 Punkt*

d) Beweisen Sie: π läßt sich nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl und $A \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot A^t = I_n$ (Einheitsmatrix). Beweisen Sie: $\det A \in \{1, -1\}$. *2 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Abbildungen von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$ sind Bilinearformen? (Falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

1. $\Phi(X, Y) = x_1 - y_3$, *1 Punkt*
2. $\Phi(X, Y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$. *1 Punkt*

Aufgabe 5.
Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, φ ein Endomorphismus von V und $X \in V$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $c \in K$ (also insbesondere $X \neq 0$). Zeigen Sie:

a) Ist $\psi := \varphi - a \cdot \mathrm{id}$ mit $a \in K$, so ist X auch ein Eigenvektor von ψ. *2 Punkte*

b) Ist φ invertierbar, so ist $c \neq 0$. *2 Punkte*

c) Ist φ invertierbar, so ist X auch ein Eigenvektor von φ^{-1}. *1 Punkt*
(Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.)

Aufgabe 6.

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und V^{**} der Bidualraum von V, und es sei $T : V \to V^{**}$, $X \mapsto X^{**}$ mit $X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$ der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von V auf V^{**}. Zeigen Sie: Für jeden Teilraum $U \leq V$ gilt:

$$X^{**} \in \mathrm{An}(\mathrm{An}(U)) \iff X \in \bigcap_{\varphi \in \mathrm{An}(U)} \mathrm{Kern}(\varphi)$$ *4 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq V$.

a) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für den Dualraum V^* von V an. *1 Punkt*

b) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für den Annihilator $\operatorname{An} T \leq V^*$ an. *1 Punkt*

c) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für die zu einer Basis von V duale Basis (von V^*) an. *1 Punkt*

d) Berechnen Sie den Annihilator $\operatorname{An} T$. *4 Punkte*

Aufgabe 8.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Teilräume $T_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ gegeben. Bestimmen Sie je eine Basis für den Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ und das Erzeugnis $\langle T_1, T_2 \rangle$.

5 Punkte

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Es sei B die Standardbasis von V und C eine weitere Basis von V mit der Basiswechselmatrix $A := {}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ sei gegeben durch ${}_B\varphi_B = M$.

a) Invertieren Sie die Matrix A. *3 Punkte*

b) Geben Sie (ohne Beweis) eine Formel an, in der die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_C$ durch ${}_B\varphi_B$ und ${}_B\mathrm{id}_C$ ausgedrückt wird. *1 Punkt*

c) Berechnen Sie ${}_C\varphi_C$. *2 Punkte*

Aufgabe 10.

V, B, φ und ${}_B\varphi_B$ seien genauso gegeben wie in Aufgbe 9.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ. *2 Punkte*

b) Berechnen Sie eine Fächerbasis von V bezüglich φ. *5 Punkte*

Aufgabe 11.

V, M, B, C und ${}_B\mathrm{id}_C$ seien genauso gegeben wie in Aufgbe 9. Weiter sei eine Bilinearform Φ auf V seien gegeben durch die Matrix ${}_B\Phi_B = M$.

a) Geben Sie (ohne Beweis) eine Formel an, in der die Matrix ${}_C\Phi_C$ durch ${}_B\Phi_B$ und ${}_B\mathrm{id}_C$ ausgedrückt wird. *1 Punkt*

b) Ist Φ ein Skalarprodukt? (Antwort mit Begründung!) *1 Punkt*
