1. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (Begründung!)

1. $x \sim y \Leftrightarrow$ es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = 7n$. *2 Punkte*
2. $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$. *3 Punkte*
3. $x \sim y \Leftrightarrow xy \geq 0$. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Gibt es Nullteiler in dem Ring $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$? (Begründung!) *3 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ der Körper mit drei Elementen. Man bestimme die Dimensionen von T_1, T_2 und des Durchschnitts der Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ von } {\mathbb{Z}_3}^4.$$ *5 Punkte*

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für

1. den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{Q})$ der Abbildungen von einer Menge $M = \{a, b, c\}$ in $\mathbb{Q}$, *2 Punkte*
2. den Teilraum $T = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a + b = 0 \text{ und } c + d = 0 \right\} \leq \mathbb{Q}^4$. *2 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

1. Man berechne eine Basis von T und ergänze sie zu einer Basis von V. *4 Punkte*
2. Man gebe eine Basis von V/T an. *1 Punkt*

Aufgabe 6.

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ x + y \end{pmatrix}$. Man bestimme alle Elemente von $\mathbb{R}^3$, die durch φ auf $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet werden. *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei K ein beliebiger Körper und $V = K^{4711}$. Es seien $X_1, ..., X_{4711}$ Vektoren aus V, und es sei φ die durch $\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{4711} \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4711} a_i X_i$ definierte Abbildung von V in V. Man zeige: Ist φ surjektiv, so ist φ auch injektiv. Hinweis: Wenn Sie einen Satz der Vorlesung verwenden, müssen Sie zeigen, daß seine Voraussetzungen erfüllt sind! *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei der 3-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \leq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2 + x$ und $f_3(x) = x^4 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei $W = \mathbb{R}^3$ und $\varphi : V \to W$ die durch $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$ definierte Abbildung von V in W. Man beweise oder widerlege:

1. φ ist linear. *2 Punkte*
2. φ ist injektiv. *4 Punkte*
3. φ ist surjektiv. *2 Punkte*
   Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen daß (f_1, f_2, f_3) linear unabhängig ist.

Aufgabe 9.
Gegeben seien die Basisfolgen $\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ und $\mathcal{D}' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ von $\mathbb{R}^2$, die Basisfolge $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ von $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Koordinatenspalte ${}_{\mathcal{D}}(\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \end{pmatrix}$ von $\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix})$ bezüglich der Basis $\mathcal{D}$ für alle $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definiert ist. Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{D}'}\varphi_{\mathcal{B}}$. *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Wieviele verschiedene Teilräume der Dimensionen 0, 1, 2, 3 bzw. 4 hat der Vektorraum $V = \mathbb{F}_2^4$? *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume? (Begründung!)

1. $M_1 = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid (a + b)c = 0\}$. *2 Punkte*
2. $M_2 = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a^2 = b^2 = c^2 \text{ und } 3a = b + c\}$. *4 Punkte*
   (Lassen Sie sich nicht verwirren !!!)
