Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (6. 10. 1993)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

a) lineare Unabhängigkeit einer nicht leeren, nicht notwendigerweise endlichen Menge von Vektoren *2 Punkte*

b) Eigenvektor *1 Punkt*

c) Bilinearform, Skalarprodukt, Radikal *3 Punkte*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie einführen, zu erklären.

Aufgabe 2.

Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x$ teilt $y - 7$ *3 Punkte*

b) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq 0$ *3 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) $M_1 = \{p \in V \mid (x-1) \text{ teilt } p\}$ *3 Punkte*

b) $M_2 = \{p \in V \mid x \text{ teilt } (p-1)\}$ *2 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und es sei a ein Nullteiler von R. Zeigen Sie, daß a in R kein (multiplikatives) Inverses besitzt. *3 Punkte*

Aufgabe 5.

T_1 und T_2 seien zwei Teilräume eines K-Vektorraums V, und es sei $T_1 \cap T_2 \neq T_1$ und $T_1 \cap T_2 \neq T_2$. Zeigen Sie, daß $T_1 \cup T_2$ kein Teilraum von V ist. *3 Punkte*

Aufgabe 6.

Es sei $V = \langle B_1, \ldots, B_6 \rangle$ ein 6-dimensionaler K-Vektorraum, und es seien T_1 ein 3-dimensionaler und T_2 ein 5-dimensionaler Teilraum von V. Der Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ habe die Dimension d.

a) Welche Werte kann d annehmen? (Antwort mit Begründung) *2 Punkte*

b) Geben Sie für jeden dieser Werte ein Beispiel für zwei entsprechende Teilräume T_1 und T_2 an. *2 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei V ein K-Vektorraum, T ein Teilraum von V, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und $X_1, \ldots, X_n \in V$, so daß $(T + X_1, \ldots, T + X_n)$ eine Basis des Restklassenraums V/T ist. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) $(X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V. *2 Punkte*

b) $(X_1, \ldots, X_n)$ ist linear unabhängig in V. *2 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (6. 10. 1993)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 8.

Es sei Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf einem K-Vektorraum V.

a) Zeigen Sie: Gilt für zwei Vektoren $Y_1, Y_2 \in V$, daß $\Phi(X, Y_1) = \Phi(X, Y_2)$ für alle $X \in V$, so folgt $Y_1 = Y_2$. *2 Punkte*

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Ist Φ wie oben und φ eine Abbildung von V in V, so daß $\Phi(X, Y) = \Phi(X, \varphi(Y))$ für alle $X, Y \in V$, so ist φ linear. *3 Punkte*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle auftretenden Quantoren hinzuschreiben.

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq V$. Bestimmen Sie den Annihilator $\mathrm{An}\, T \leq V^*$.

5 Punkte

Aufgabe 10.

Es sei V der von der Menge $B = \{\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erzeugte 3-dimensionale Vektorraum. Dann ist B eine Basis von V. Ferner sei die (bekanntlich lineare) Abbildung $\varphi : V \to V,\ f(x) \mapsto f'(x) + f''(x)$ gegeben, wobei f' und f'' die gewöhnliche erste und zweite Ableitung von f nach x bezeichnen.

a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B\varphi_B$. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie $\mathrm{Kern}\varphi$ (und vergessen Sie dabei nicht, daß V aus Funktionen und nicht aus Zahlenspalten besteht). *3 Punkte*

Aufgabe 11.

Invertieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. *5 Punkte*

Aufgabe 12.

Es sei $V = \mathbb{Q}^3$ und B die Standardbasis von V, und es sei M die in Aufgabe 11 gegebene Matrix. Eine lineare Abbildung φ von V nach V sei durch ${}_B\varphi_B = M$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten. *3 Punkte*

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenvektorraum. *2 Punkte*

Aufgabe 13.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine normierte Orthogonalbasis von V.

7 Punkte
