1. Halbklausur zur Linearen Algebra I (20. 12. 96)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 51 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Auf der Menge $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch $a \circ b = (a-1)\cdot(b-1)+1$ für $a, b \in M$.

(a) Zeigen Sie, daß $\circ$ assoziativ ist. (Hinweis: Multiplizieren Sie dabei die Klammerausdrücke nicht aus.)

(b) Gibt es in M ein neutrales Element bezüglich $\circ$?

(c) Ist M eine Gruppe? *6 Punkte*

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $V = K^2$ über einem Körper K sei die Teilmenge $M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a + b = a^2 \right\}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob M ein Teilraum von V ist

(a) für den Fall $K = \mathbb{Z}_2$, (b) für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$. *4 Punkte*

Aufgabe 3.

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear?

(a) $\varphi_1 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$, (b) $\varphi_2 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 + x_2 \\ 2 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}\,\varphi_i$ und von $\mathrm{Bild}\,\varphi_i$, wenn φ_i linear ist. *9 Punkte*

Aufgabe 4.

Auf $\mathbb{Z}$ sei die Relation $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq 2b \}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob R reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung) *3 Punkte*

Aufgabe 5.

Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{19}$ sei das Element $a = \overline{9}$ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der in den Hausaufgaben geübten Methode, also ohne a zu potenzieren und ohne euklidischen Algorithmus,

(a) das Element a^7, (b) das Element a^{-1}. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ sowie der Teilraum $T = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Folge der Restklassen $(T + X, T + Y)$ linear unabhängig ist.

6 Punkte

Aufgabe 7.
Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.

5 Punkte

Aufgabe 8.
Im Spaltenraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ gegeben. Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(X) = Y$, $\varphi(Y) = X$ und $\varphi(Z) = Z$? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? (Auf die Begründung kommt es an.)

6 Punkte

Aufgabe 9.
In Abb$\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ seien die Funktionen f_1, f_2, g_1 und g_2 gegeben durch

$$f_1(x) = 2e^{3x} - e^{-2x}, \qquad f_2(x) = -e^{3x} + e^{-2x}, \qquad g_1(x) = e^{3x}, \qquad g_2(x) = e^{-2x}.$$

Wir betrachten den Teilraum $V = \langle f_1, f_2 \rangle$. Offensichtlich sind $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ und $\mathcal{B} = (g_1, g_2)$ Basen von V, und es gibt zwei lineare Abbildungen φ und ψ von V in V mit $\varphi(f) = f'$ und $\psi(f) = f^{(19)}$ (neunzehnte Ableitung von f) für $f \in V$ (nicht zu beweisen). Berechnen Sie

(a) die Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$,

(b) die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$. (Hier genügt es, wenn Sie die großen Zahlen in den Matrizen als Summen von Potenzen schreiben.)

8 Punkte