

Ankreuzteil

Aufgabe 1.

Es sei K ein Körper und $V = K^{2 \times 2}$ der K -Vektorraum der 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume (d.h. Untervektorräume)?

- | | | |
|--|--|--|
| $\{A \in V \mid \det A = 0\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A^2 = E_2\}$ (E_2 ist die Einheitsmatrix) | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + A^T = \underline{0}\}$ ($\underline{0}$ ist die Nullmatrix) | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + sE_2 = \underline{0}$ für ein $s \in K\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{ A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0} \right\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 2.

Welche der folgenden Abbildungen sind \mathbb{R} -linear?

- | | | |
|---|--|--|
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x - 1, x + 1)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (2x, 0)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 3.

Es sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$ und $\underline{0} \neq b \in K^{m \times 1}$, wobei $\underline{0}$ der Nullvektor ist.

Weiter seien $L = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = b\}$ und $L_0 = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = \underline{0}\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Teilraum heißt Untervektorraum)

- | | | |
|--|--|--|
| L ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| L_0 ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $L \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist $v \in L$, so ist $L = \{v + w \mid w \in L_0\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $ L = 1$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $ L_0 = 1 \implies L = 1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m < n$, so ist $L \neq \emptyset$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m > n$, so ist $L = \emptyset$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist (v_1, \dots, v_n) **linear abhängig** genau dann, wenn

- | | | |
|---|--|--|
| es $s_1, \dots, s_n \in K$ gibt mit $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| für alle $s_1, \dots, s_n \in K$ gilt $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| aus $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ mit $s_i \in K$ folgt $s_1 = \dots = s_n = 0$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| es $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| es ein $v \in V$ gibt mit $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 5.

Es sei V ein 2-dimensionaler \mathbb{F}_2 -Vektorraum. Tragen Sie die richtigen **Zahlen** ein.
Die Anzahl

der Vektoren von V ist	4
der 1-dimensionalen Teilräume von V ist	3
der Basisfolgen von V ist	6
der Basen (d.h. Basismengen) ist	3
der linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist	16
der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist	6
der bijektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist	6
der linearen Abbildungen (d.h. Linearformen) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist	4
der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist	0
der surjektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist	3

Aufgabe 6.

Es seien V und W Vektorräume über \mathbb{Q} mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$, $\varphi : V \rightarrow W$ ein Epimorphismus (d.h. surjektive, lineare Abbildung) und $\psi : W \rightarrow V$ ein Monomorphismus (d.h. injektive, lineare Abbildung). Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Für beliebige Basen B und B' von V bzw. W ist ${}_{B'}[\varphi]_B \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$ Ja Nein
- Für beliebige Basen B und B' von V bzw. W ist $\text{Rg}({}_B[\psi]_{B'}) = 2$... Ja Nein
- Es gibt Basen B und B' von V bzw. W mit ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.. Ja Nein
- Es gibt Basen B und B' von V bzw. W mit ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.. Ja Nein
- Für jede Basis B von V ist ${}_B[\psi \circ \varphi]_B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ Ja Nein
- Für jede Basis B von V ist $\det({}_B[\psi \circ \varphi]_B) = 0$ Ja Nein

Aufgabe 7.

Es sei K ein Körper, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $\varphi \in \text{End } V$. Weiter sei $\mu \in K[X]$ das Minimalpolynom und $\chi \in K[X]$ das charakteristische Polynom von φ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Es ist stets $\text{Grad } \mu < n$ Ja Nein
- Es ist stets $\text{Grad } \chi = n$ Ja Nein
- Ist φ injektiv, so ist 0 kein Eigenwert von φ Ja Nein
- Genau dann ist $t \in K$ Eigenwert von φ , wenn $\mu(t) = 0$ ist Ja Nein
- Ist $\mu = \chi$, so ist φ diagonalisierbar Ja Nein
- Ist $\varphi^{2n} = 0$, so ist $\varphi^n = 0$ Ja Nein
- Ist $\mu = X - 1$, so ist $\varphi = \text{id}_V$ Ja Nein
- Ist $\chi = (X - 1)^n$, so ist $\varphi = \text{id}_V$ Ja Nein

Aufgaben mit Begründung

Aufgabe 8.

(a) Gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}?$$

(4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine solche Abbildung explizit an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

Aufgabe 9.

Es seien $n \geq 2$ und $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ mit:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 2 & \text{für } i = j > 1 \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Man berechne

(a) $\det[a_{i,j}]$, (3 Punkte)

(b) $\det[b_{i,j}]$. (3 Punkte)

Aufgabe 10.

Es sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der \mathbb{R} -Vektorraum der reellen Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2 und $\varphi : V \rightarrow V$ sei definiert durch $\varphi(f)(x) = f'(x) + f(x-1)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $f \in V$. Dabei steht f' für die Ableitung von f .

(a) Man zeige: φ ist linear. (1 Punkt)

(b) Man berechne $A = {}_B[\varphi]_B$ für die Basisfolge $B = (p_0 + p_1, -p_0 + p_1, p_2)$; dabei ist $p_i \in V$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ und $p_0(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und $i = 1, 2$.
(Es braucht nicht bewiesen zu werden, dass B eine Basis ist.) (2 Punkte)

(c) Man berechne die Eigenwerte von φ und gebe zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)

(d) Ist φ diagonalisierbar? (1 Punkt)

(e) Was ist die Jordansche Normalform von φ ? (1 Punkt)

Aufgabe 11.

Es sei Φ eine Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ mit Gram-Matrix

$$[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei S die Standardbasis von V ist.

(a) Ist Φ nicht ausgeartet? Ist Φ positiv definit? *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis B von V bezüglich Φ und berechnen Sie $[\Phi]_B$.
(4 Punkte)
