10.2.2004

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 03/04, 2. Teil

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004 **Gruppe A**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 3$ und $\dim_K W = 2$ und $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V bzw. W mit ...	
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es sei K ein Körper.	
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n mit $f(A) = E_n$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{Z}_2$, so ist $K[X]$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \to K^{n\times n}$ mit $\varphi(X+1) = E_n$?	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ($1 \le n \in \mathbb{N}$) und $\varphi \in \operatorname{End} V$. Mit χ_φ ist das charakteristische Polynom und mit μ_φ das Minimalpolynom von φ gemeint. Gelten die folgenden Aussagen?	
	Aus $\varphi^{2n} = 0$ folgt $\varphi^n = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\chi_\varphi = X^n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\mu_\varphi = X^n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\varphi^m = 0$ für ein m, so hat φ genau einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \ge 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist $a_{i,j} = 7$ für alle $1 \le i, j \le n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $a_{i,j} = i$ für $1 \le i \le j \le n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \le j < i \le n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $a_{i,j} = j - i$ für $1 \le i \le j \le n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \le j < i \le n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum für ein $1 \le n \in \mathbb{N}$. Ist $\Phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basisfolgen von V, so ...	
	... sind $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ und $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein
	... ist $\operatorname{Rg}(M_{\mathcal{B}}(\Phi)) = \operatorname{Rg}(M_{\mathcal{B}'}(\Phi))$.	☐ Ja ☐ Nein
	... ist $\det M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \det M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$.	☐ Ja ☐ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004, Rechenteil, **Gruppe A**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei $V = \langle \sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos \rangle \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{B} = (\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos)$, ferner sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ gegeben durch $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) + f''(x)$ für $f \in V$.

Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) =$ *(6 Punkte)*

7 Es sei K ein Körper. Ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in K^{3\times 3}, f = X^6 + X^5 - X^4 + X^3 + X + 1 \in K[X],$$

dann ist $f(A) =$ *(6 Punkte)*

8 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A =$ *(3 Punkte)*

Die Eigenwerte von A sind: Eigenwerte: *(2 Punkte)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P =$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mittels elementarer Zeilenoperationen. Dokumentieren Sie genau die Umformungen und geben Sie A^{-1} explizit an. *(6 Punkte)*

10 Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, $\psi \in \operatorname{End}(V)$ und v ein Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$. Bestimmen Sie einen Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$. *(6 Punkte)*

11 Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.

Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihre Umformungen bzw. Berechnungen. *(6 Punkte)*

12 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Beweisen Sie, dass es ein Polynom $f \in K[X]$ mit Grad $f < n$ gibt mit $A^{-1} = f(A)$.
Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom. *(6 Punkte)*

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004 **Gruppe B**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper.		
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n mit $f(A) = E_n$?	☐ Ja	☐ Nein
	Gibt es einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \to K^{n\times n}$ mit $\varphi(X+1) = E_n$?	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{Z}_2$, so ist $K[X]$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja	☐ Nein
2	Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist $a_{i,j} = 7$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $a_{i,j} = i$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $a_{i,j} = j - i$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
3	Es sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum für ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Ist $\Phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basisfolgen von V, so ...		
	... sind $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ und $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ ähnlich.	☐ Ja	☐ Nein
	... ist $\det M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \det M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$.	☐ Ja	☐ Nein
	... ist $\mathrm{Rg}(M_{\mathcal{B}}(\Phi)) = \mathrm{Rg}(M_{\mathcal{B}'}(\Phi))$.	☐ Ja	☐ Nein
4	Es sei K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 3$ und $\dim_K W = 2$ und $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V bzw. W mit ...		
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja	☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja	☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja	☐ Nein
5	Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ($1 \leq n \in \mathbb{N}$) und $\varphi \in \mathrm{End}\, V$. Mit χ_φ ist das charakteristische Polynom und mit μ_φ das Minimalpolynom von φ gemeint. Gelten die folgenden Aussagen?		
	Aus $\varphi^{2n} = 0$ folgt $\varphi^n = 0$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\mu_\varphi = X^n$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\chi_\varphi = X^n$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\varphi^m = 0$ für ein m, so hat φ genau einen Eigenwert.	☐ Ja	☐ Nein

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004, Rechenteil, **Gruppe B**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei $V = \langle \sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos \rangle \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{B} = (\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos)$, ferner sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ gegeben durch $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) - f''(x)$ für $f \in V$.

Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) =$ *(6 Punkte)*

7 Es sei K ein Körper. Ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in K^{3\times 3}, f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 \in K[X],$$

dann ist $f(A) =$ *(6 Punkte)*

8 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A =$ *(3 Punkte)*

Die Eigenwerte von A sind: Eigenwerte: *(2 Punkte)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P =$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mittels elementarer Zeilenoperationen. Dokumentieren Sie genau die Umformungen und geben Sie A^{-1} explizit an. *(6 Punkte)*

10 Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, $\psi \in \operatorname{End}(V)$ und v ein Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$. Bestimmen Sie einen Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$. *(6 Punkte)*

11 Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.
Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihre Umformungen bzw. Berechnungen. *(6 Punkte)*

12 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Beweisen Sie, dass es ein Polynom $f \in K[X]$ mit Grad $f < n$ gibt mit $A^{-1} = f(A)$.
Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom. *(6 Punkte)*