1. Klausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Semesterklausuren müssen zusammen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 5}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4$.

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes L des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ($x \in \mathbb{Z}_2^5$), und eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$. Welche Dimension hat L? Wieviele Lösungen hat $Ax = b$? Begründen Sie Ihre Antworten ! 6 Pkte.

Aufgabe 2.

Sei $n \geq 2$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ definiert durch $a_{ij} = i + j - 1$ und L die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ($x \in \mathbb{Q}^n$).

(a) Bestimmen Sie $\dim L$.

Sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^n$. Ist $Ax = b$ lösbar für

(b) $b_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$?

(c) $b_i = i(i+1)$ für $i = 1, \ldots, n$?

Begründen Sie Ihre Antworten! 6 Pkte.

Aufgabe 3.

Welche der folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Q}^3$ sind Teilräume?

(a) $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a \cdot b + c = 0\}$.

(b) $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$.

(c) $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a - c = 1\}$.

Begründen Sie Ihre Antworten! 5 Pkte.

Aufgabe 4.
Sei $V = \left\{ A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \right\}$.
(a) Zeigen Sie, daß V ein Teilraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist.
(b) Bestimmen Sie eine Basis von V, und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ (begründen Sie, daß Sie auch tatsächlich eine Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ gefunden haben). 8 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei K eine Körper und $V = \mathrm{Abb}(K, K)$ der Vektorraum aller Abbildungen von K nach K. Seien $0 \neq a \in K$ und $b \in K$ fest vorgegeben, und $\varphi : V \to V$ definiert durch

$$\varphi(f)(x) := f(ax + b), \quad f \in V, x \in K.$$

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.
Sei jetzt $K = \mathbb{R}$ und $P_2(\mathbb{R}) \subseteq V$ der Teilraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, mit Basis $B = (p_0, p_1, p_2)$ (wobei $p_i(x) = x^i$, $x \in \mathbb{R}$).
(b) Zeigen Sie: Für $f \in P_2(\mathbb{R})$ ist auch $\varphi(f) \in P_2(\mathbb{R})$.
(c) Sei φ_1 die Einschränkung von φ auf $P_2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie ${}_B[\varphi_1]_B$ für $a = 3$, $b = -1$, und zeigen Sie, daß φ_1 bijektiv ist. 7 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei $V = \mathbb{Z}_3^3$, $W = \mathbb{Z}_3^2$, und $\varphi : V \to W$ definiert durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{Z}_3.$$

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.
Seien $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Basen von V bzw. W (das müssen Sie nicht beweisen).
(b) Bestimmen Sie ${}_C[\varphi]_B$.
(c) Berechnen Sie Basen für Kern φ und Bild φ, sowie Rang φ und $c_C(\varphi(v))$ für $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 8 Pkte.