2. Klausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Semesterklausuren müssen zusammen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Zur weiteren Organisation

- Diejenigen, die ihren Schein bis Freitag zur Vorlage beim Prüfungsamt benötigen, versehen das Deckblatt mit einem dicken Kreuz in der rechten oberen Ecke. Sind alle Scheinbedingungen erfüllt, so können die Scheine am Freitag 11.00 Uhr im Seminarraum 221, 2.Etage Sammelbau, abgeholt werden.
- Klausurrückgabe und Meckertermin ist Fr, 15.2.1991, 12.15–13.00 Uhr im Fo1.
- Die Nachholklausur findet statt Mo, 15.4. 1991, 14.00–17.00 Uhr im AM.
- Die Scheine werden ausgegeben Di, 16.4.1991, 11.00 Uhr im Fo2.

Aufgabe 1.
Seien $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\sigma' : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ Permutationen in S_6. Schreiben Sie σ, σ' als Produkte von Zykeln mit disjunkten Ziffernmengen, und berechnen Sie $\sigma \circ \sigma'$, $\sigma' \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma$, $\operatorname{sign}(\sigma)$ und $\operatorname{sign}(\sigma')$. 6 Pkte.

Aufgabe 2.
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.
(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.
(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. 9 Pkte.

Aufgabe 3.
Seien $f = X^8 + X^7 + X^5 + X^3 + 1$ und $g = X^2 + X - 1$ Polynome in $\mathbb{R}[X]$.
(a) Dividieren Sie f mit Rest durch g.
(b) Berechnen Sie $f(A)$ für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. 7 Pkte.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie für $n \geq 2$ die Determinante d_n von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{, falls } i = j \\ -1 & \text{, falls } j+1 = i \text{ oder } i+1 = j < n \\ -2 & \text{, falls } i+1 = j = n \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

8 Pkte.

Aufgabe 5.
Gegeben seien die folgenden Teilräume von $V = \mathbb{Z}_2^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \ W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Bestimmen Sie Basen für $U \cap W$ und $U + W$. 8 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ und χ_A das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\chi_A = X^n$.

(ii) $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

(iii) A ist ähnlich zu einer Matrix $B = (b_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $b_{ij} = 0$ für $i \geq j$.

8 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{5\times 5}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A sowie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{Z}_2^{5\times 5}$, so daß $P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist. 9 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j+1 \text{ oder } i = 1, j = n \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.
(b) Berechnen Sie für den Fall $n = 4$ alle Eigenwerte von A, die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume, und geben Sie die Jordan-Normalform von A an. (*Beachten Sie, daß in* $\mathbb{Z}_2$ *die Gleichung* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ *gilt.*) 9 Pkte.