2. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (3. 2. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 70 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen insgesamt (also aus beiden Semesterklausuren zusammen) mindestens 50 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Formulieren Sie Definitionen für die Begriffe „Eigenwert", „Eigenvektor" und „Eigenraum". (Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben.) *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Es seien Permutationen $\sigma, \tau \in S_6$ definiert durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie σ und τ als Produkte von Zykeln mit disjunkten Ziffernmengen.

b) Berechnen Sie daraus $\sigma \cdot \tau$, $\tau \cdot \sigma$ und $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma$ jeweils in Zykelnschreibweise (Multiplikation von rechts nach links wie in der Vorlesung). *5 Punkte*

Aufgabe 3.
In $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ seien die Teilräume $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ und $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben.

Berechnen Sie je eine Basis für $U \cap W$ und $U + W$. *6 Punkte*

Aufgabe 4.
Es seien $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p = X^6 - 5X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 2X - 9$ und $q = X^2 - 5X - 2$.

a) Dividieren Sie p mit Rest durch q.

b) Berechnen Sie $q(A)$ und $p(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. *7 Punkte*

Aufgabe 5.

a) Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in $\mathbb{Z}_5^{2\times 2}$?

b) Wieviele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ mit $\det A = 0$ gibt es?

c) Es sei $0 \neq a \in \mathbb{Z}_5$. Wieviele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$ mit $\det A = a$ gibt es?

Antwort jeweils mit Begründung. *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sind $B = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ und $B' = (\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix})$ Basisfolgen von $V = \mathbb{Q}^3$ sowie $C = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ und $C' = (\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix})$ Basisfolgen von $W = \mathbb{Q}^2$. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ sei definiert durch $\varphi(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$, und es sei $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$.

a) Berechnen Sie ${}_C[\varphi]_B$ und ${}_{C'}[\varphi]_{B'}$.

b) Berechnen Sie $c_{B'}(v)$ und $c_{C'}(\varphi(v))$. *8 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei K ein Körper, V ein K-Vektrorraum und $\varphi \in \operatorname{End} V$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie:

a) φ ist diagonalisierbar.

b) Ist t ein Eigenwert von φ, so gilt $t \in \{0, 1\}$. *5 Punkte*

Aufgabe 8.
Es seien φ und ψ zwei vertauschbare Endomorphismen eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von ψ ist φ-invariant. *5 Punkte*

Aufgabe 9.

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

b) Zeigen Sie, ohne irgendwelche Matrixmultiplikationen auszuführen, daß A^4 gleich der Einheitsmatrix E_3 ist.

c) Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ vom Grade 2, für das $p(A) = A^{-1}$ gilt. *12 Punkte*

Aufgabe 10.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$. Berechnen Sie

a) die Jordan-Normalform von A,

b) eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist,

c) das Minimalpolynom von A. *11 Punkte*
