Aufgabenblatt 1 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe:

a) Wann heißt eine Abbildung injektiv? *1 Punkt*

b) Wann heißt ein Endomorphismus diagonalisierbar? *1 Punkt*

c) Was heißt Dualraum? *1 Punkt*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben und alle Bezeichnungen, die Sie benutzen (wie z. B. K oder V), zu erklären.

Aufgabe 2.

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

a) Ist $M_1 = \{f \in V \mid f(2) = f(0) + 2\}$ ein Teilraum von V? *2 Punkte*

b) Ist $M_2 = \{f \in V \mid f(2) = f(1) \cdot 2\}$ ein Teilraum von V? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Für die Aufgaben 3 bis 5 nehmen wir an, es sei V der Vektorraum $V = \mathbb{Z}_5^{3\times 1}$, und es seien in V die Teilräume $T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle$, $T_2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ und $T_3 = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ gegeben.

Warnung: Denken Sie daran, über $\mathbb{Z}_5$ zu rechnen!

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die Dimensionen von T_1, von T_2 und von $T_1 + T_2$. *3 Punkte*

b) Es gibt einen Dimensionssatz, mit dem man hieraus die Dimension von $T_1 \cap T_2$ berechnen kann. Formulieren Sie diesen Satz (als vollständigen Satz mit allen Voraussetzungen). *2 Punkte*

Aufgabe 4.

Berechnen Sie je eine Basis für T_2 und für den Faktorraum V/T_2.
(Formulierung und Begründung sind wichtig.) *3 Punkte*

Aufgabe 5.

Berechnen Sie eine Basis für $T_1 \cap T_3$. *5 Punkte*

Zur Erinnerung: Denken Sie daran, über $\mathbb{Z}_5$ zu rechnen!

Aufgabenblatt 2 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.

Es sei $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, daß die durch $\varphi(A) = A + A^{\mathrm{tr}}$ für $A \in V$ definierte Abbildung $\varphi\colon V \to V$ linear ist. *2 Punkte*

b) Geben Sie eine Basis B von V an, und berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B$ von φ bezüglich B. *4 Punkte*

c) Berechnen Sie den Rang von φ. *2 Punkte*

Aufgabe 7.

Gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 7 Unbekannten über einem geeigneten Körper K, das genau 4 Lösungen hat?

(Antwort mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.
Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 8.

Es sei $V = \mathbb{Z}_3^{5\times 1}$ und T ein Teilraum der Dimension 2 von V.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von T. *2 Punkte*

b) Berechnen Sie die Anzahl der Basisfolgen von V und von T. *2 Punkte*

c) Berechnen Sie die Anzahl der 2-dimensionalen Teilräume von V. *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Für die Aufgaben 9 bis 10 legen wir folgende Bezeichnungen fest:
Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Durch die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ seien eine weitere Basis C von V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ gegeben.

Aufgabe 9.

a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}_C[id]_B$. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C[\varphi]_C$. *3 Punkte*

Aufgabe 10.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum. *3 Punkte*

Aufgabenblatt 3 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 11.

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasis $C = (w_1, w_2, w_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie

a) die Matrix $[\Phi]_C$, *5 Punkte*

b) die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_C$ und *1 Punkt*

c) die Basisvektoren w_1, w_2, w_3 (als Ausdrücke in v_1, v_2, v_3) an. *1 Punkt*

Aufgabe 12.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix $A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{für } \; i = j = 1, \\ -2 & \text{für } \; i = j \geq 2, \\ \;\;1 & \text{für } \; |\, i - j \,| = 1, \\ \;\;0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante von A. *4 Punkte*
