Aufgabenblatt

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (28. 9. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

a) Basisfolge eines endlich erzeugten Vektorraums (geben Sie zwei verschiedene Definitionen an), *2 Punkte*

b) charakteristisches Polynom (wovon?). *2 Punkte*

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen werden angegeben, und für alle auftretenden Namen (wie z. B. K oder V) wird gesagt, was für Objekte sie bezeichnen.

Aufgabe 2.

Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums $V = \mathbb{R}^{1\times 4}$ sind Teilräume von V?

a) $M_1 = \{\, [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_1^2 + x_3^4 = 0 \,\}$, *3 Punkte*

b) $M_2 = \{\, [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_2^1 + x_4^3 = 0 \,\}$. *2 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Aufgabe 3.

Bringen Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{4\times 4}$ durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform, und geben Sie ihren Rang an

a) für den Fall $K = \mathbb{Z}_2$, *2 Punkte*

b) für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Gegeben sei ein 4-dimensionaler Vektorraum V über einem Körper K. Für welche der Zahlen $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gibt es zwei 3-dimensionale Teilräume T_1 und T_2 von V mit $\dim(T_1 \cap T_2) = n$, für welche nicht? (Mit Beweis. Geben Sie insbesondere im ersten Fall jeweils ein konkretes Beispiel für T_1 und T_2 an.) *6 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^{n\times n}$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K.

a) Zeigen Sie: Ist $A \in K^{n\times n}$ (fest gewählt), so ist die durch $\varphi(X) = XA$ für $X \in V$ definierte Abbildung $\varphi\colon V \to V$ linear. (Argumentation und Formulierung sind wichtig.) *3 Punkte*

b) Sei nun konkret $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Wählen Sie eine Basis B von V (geben Sie sie an), und berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B$ von φ bezüglich B. *4 Punkte*

Aufgabe 6.

a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten über einem beliebigen Körper lösbar? *3 Punkte*

b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten, das genau vier Lösungen hat? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Aufgabe 7.

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

a) Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in $K^{2\times 2}$? *3 Punkte*

b) Wieviele Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ mit $\det A = 0$ gibt es? *2 Punkte*

c) Es sei $0 \neq d \in K$. Wieviele Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ mit $\det A = d$ gibt es? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Aufgabe 8.

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ eine Basis des zugehörigen Eigenraums. (Warnung: Verwechseln Sie die Vektoren der Eigenräume nicht mit ihren Koeffizientenspalten bezüglich B.) *3 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasis $C = (w_1, w_2, w_3)$ von V bezüglich Φ,
und geben Sie die Matrix $[\Phi]_C$ sowie die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_C$ an. *5 Punkte*

b) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.) *1 Punkt*

c) Ist Φ positiv definit? (Begründung.) *1 Punkt*

Aufgabe 10.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ sei definiert durch $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } |\,i-j\,| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie die Determinante von A. *5 Punkte*