# Aufgabenblatt

## Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (28. 9. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

a) Basisfolge eines endlich erzeugten Vektorraums (geben Sie zwei verschiedene Definitionen an), *2 Punkte*

b) charakteristisches Polynom (wovon?). *2 Punkte*

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen werden angegeben, und für alle auftretenden Namen (wie z. B. $K$ oder $V$) wird gesagt, was für Objekte sie bezeichnen.

---

**Aufgabe 2.**

Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums $V = \mathbb{R}^{1\times 4}$ sind Teilräume von $V$?

a) $M_1 = \{\, [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_1^2 + x_3^4 = 0 \,\}$, *3 Punkte*

b) $M_2 = \{\, [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_2^1 + x_4^3 = 0 \,\}$. *2 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

**Aufgabe 3.**

Bringen Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{4\times 4}$ durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform, und geben Sie ihren Rang an

a) für den Fall $K = \mathbb{Z}_2$, *2 Punkte*

b) für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$. *3 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

Gegeben sei ein 4-dimensionaler Vektorraum $V$ über einem Körper $K$. Für welche der Zahlen $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gibt es zwei 3-dimensionale Teilräume $T_1$ und $T_2$ von $V$ mit $\dim(T_1 \cap T_2) = n$, für welche nicht? (Mit Beweis. Geben Sie insbesondere im ersten Fall jeweils ein konkretes Beispiel für $T_1$ und $T_2$ an.) *6 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^{n\times n}$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über $K$.

a) Zeigen Sie: Ist $A \in K^{n\times n}$ (fest gewählt), so ist die durch $\varphi(X) = XA$ für $X \in V$ definierte Abbildung $\varphi\colon V \to V$ linear. (Argumentation und Formulierung sind wichtig.) *3 Punkte*

b) Sei nun konkret $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Wählen Sie eine Basis $B$ von $V$ (geben Sie sie an), und berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B$ von $\varphi$ bezüglich $B$. *4 Punkte*

---

**Aufgabe 6.**

a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten über einem beliebigen Körper lösbar? *3 Punkte*

b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten, das genau vier Lösungen hat? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

**Aufgabe 7.**

Es sei $K$ ein endlicher Körper mit $q$ Elementen.

a) Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in $K^{2\times 2}$? *3 Punkte*

b) Wieviele Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ mit $\det A = 0$ gibt es? *2 Punkte*

c) Es sei $0 \neq d \in K$. Wieviele Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ mit $\det A = d$ gibt es? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

**Aufgabe 8.**

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von $V$. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\varphi$ und ihre algebraischen Vielfachheiten. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von $\varphi$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums. (Warnung: Verwechseln Sie die Vektoren der Eigenräume nicht mit ihren Koeffizientenspalten bezüglich $B$.) *3 Punkte*

---

**Aufgabe 9.**

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von $V$. Ein Skalarprodukt $\Phi$ auf $V$ sei gegeben durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasis $C = (w_1, w_2, w_3)$ von $V$ bezüglich $\Phi$, und geben Sie die Matrix $[\Phi]_C$ sowie die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_C$ an. *5 Punkte*

b) Ist $\Phi$ ausgeartet? (Begründung.) *1 Punkt*

c) Ist $\Phi$ positiv definit? (Begründung.) *1 Punkt*

---

**Aufgabe 10.**

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ sei definiert durch $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } |\,i-j\,| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie die Determinante von $A$. *5 Punkte*

---