Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und $A, A', T \in K^{n\times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AT = TA'$. Dann gilt:

$\det A = \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(A + A') = \det A + \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det A = \det A'$, wenn AT invertierbar ist	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(TA') = \det(TA)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über K. Es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.

$\mathrm{Grad}(f + g) = \max(\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g))$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Grad}(fg) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Grad}(f + g) = \mathrm{Grad}(f - g)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$ mit $\mathrm{Grad}(rq) < \mathrm{Grad}(g)$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Ist g ein Teiler von f, dann ist jede Nullstelle von f auch eine von g.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 4. Es seien K ein Körper und $A \in K^{k\times l}$, $B \in K^{l\times m}$ und $C \in K^{m\times n}$. Dann gilt:

$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$ $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

$\mathrm{Rang}(AB) \geq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$ $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\mathrm{Rang}(ABC) = \mathrm{Rang}(AB) + \mathrm{Rang}(BC) - \mathrm{Rang}(B)$ $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\mathrm{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$ $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

$\mathrm{Rang}(ABC) > 0$ wenn, $ABC \neq 0$ $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Aufgabe 5. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es seien σ und τ Permutationen aus S_n. Dann gilt:

$\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma)$ $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

$\mathrm{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$ $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

$(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$ $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Es gibt ein $\tau \in S_n$ mit $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$ $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 6. Sei K ein Körper, $M \in K^{n\times n}$, χ_M das charakteristische Polynom von M, $t \in K$ und $(X - t)^2$ ein Teiler von χ_M. Dann gilt:

t ist Eigenwert von M. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

M hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert t. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\chi_M(M)$ bildet jeden Eigenvektor von M auf 0 ab. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Der Rang von M ist gleich n, wenn X kein Teiler von χ_M ist. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Das Minimalpolynom von M ist durch $(X - t)$ teilbar. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Aufgabe 7. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$.

Es gibt eine surjektive Abbildung $\varphi : A \to B$. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist surjektiv. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Die Abbildung $\varphi : A \times B \to B, (a, b) \mapsto b$ ist surjektiv. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Es gibt eine injektive Abbildung $\varphi : A \to B$. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist injektiv. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 8. Sind die folgenden Aussagen richtig?

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte hat. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Jede $n \times n$-Matrix ist diagonalisierbar. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer $n \times n$-Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit. $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.
Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für} \quad i = j \\ 1 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Man berechne $\det(A)$. (6 Punkte)

Aufgabe 10.
Seien $V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \to V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von V ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$. (4 Punkte)

Aufgabe 11.
Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varphi, \psi \in \operatorname{End} V$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T \qquad \text{für } A \in V \qquad \text{(Transponierte zu A)} \\ \psi(A) &= A^T + 3A \qquad \text{für } A \in V \end{aligned}$$

(a) Man beweise, dass φ und ψ diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von φ und von ψ. (4 Punkte)

(b) Für $n = 2$ gebe man explizit eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von ψ besteht. (4 Punkte)

Aufgabe 12.
Sei $A \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. (4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A. (2 Punkte)

(d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)

Aufgabe 13.
Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

(8 Punkte)