Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei K ein Körper.

T1) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ ($x \in \mathbb{F}_{11}$):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

T2) Es seien V und W K-Vektorräume mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ und $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2\times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3\times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein

T3) Sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\varphi = (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mu_\varphi = (X-1)^3$; ferner sei $\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \mathrm{id}_V) = 2$. Dann ist die Jordansche Normalform von φ (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☐ ☐ ☐ ☐

T4) Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $\dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$0 \in K$ kann Eigenwert von φ sein.	☐ Ja	☐ Nein
$\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von φ sein.	☐ Ja	☐ Nein
φ kann $n+1$ Eigenwerte haben.	☐ Ja	☐ Nein
φ kann $n+1$ Eigenvektoren haben.	☐ Ja	☐ Nein
φ hat immer einen Eigenwert.	☐ Ja	☐ Nein
Ist 0 Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.	☐ Ja	☐ Nein
Die Summe von Eigenvektoren von φ ist auch Eigenvektor.	☐ Ja	☐ Nein
Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.	☐ Ja	☐ Nein

T5) A und A' seien $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$\chi_A = \chi_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☐ Nein
$\mu_A = \mu_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☐ Nein
Rang $A = n \Longleftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein
Rang $A = n \Longleftrightarrow \mu_A(0) \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein
Rang $A = 0 \Longleftrightarrow \chi_A = X^n$	☐ Ja	☐ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.