# Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei $K$ ein Körper.

**T1)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ ($x \in \mathbb{F}_{11}$):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

**T2)** Es seien $V$ und $W$ $K$-Vektorräume mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ und $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

| | | |
|---|---|---|
| ${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2\times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| ${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3\times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| ${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| ${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| ${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | ☐ Ja | ☐ Nein |

**T3)** Sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\varphi = (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mu_\varphi = (X-1)^3$; ferner sei $\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \mathrm{id}_V) = 2$. Dann ist die Jordansche Normalform von $\varphi$ (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☐ ☐ ☐ ☐

**T4)** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $\dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

| | | |
|---|---|---|
| $0 \in K$ kann Eigenwert von $\varphi$ sein. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| $\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von $\varphi$ sein. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| $\varphi$ kann $n+1$ Eigenwerte haben. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| $\varphi$ kann $n+1$ Eigenvektoren haben. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| $\varphi$ hat immer einen Eigenwert. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Ist 0 Eigenwert, so ist $\varphi$ die Nullabbildung. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Die Summe von Eigenvektoren von $\varphi$ ist auch Eigenvektor. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor. | ☐ Ja | ☐ Nein |

**T5)** $A$ und $A'$ seien $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $K$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

| | | |
|---|---|---|
| $\chi_A = \chi_{A'} \Longrightarrow A$ und $A'$ sind ähnlich | ☐ Ja | ☐ Nein |
| $\mu_A = \mu_{A'} \Longrightarrow A$ und $A'$ sind ähnlich | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Rang $A = n \Longleftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Rang $A = n \Longleftrightarrow \mu_A(0) \neq 0$ | ☐ Ja | ☐ Nein |
| Rang $A = 0 \Longleftrightarrow \chi_A = X^n$ | ☐ Ja | ☐ Nein |

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort $-1$ Punkt.