**Nachholklausur Lineare Algebra I (Prof. Dr. U. Schoenwaelder), 25.4.2003** **Gruppe B**

**Name:** _____ **Matrikelnummer:** _____

**Ankreuzteil.** Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine linear unabhängige Folge von Vektoren in $V$ und $(c_1, c_2, c_3)$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist, dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in $V$ und $(c_1, c_2)$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist, dann ist $\mathcal{B}$ linear abhängig. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $V$ ist, dann gilt $V = \langle b_1\rangle \oplus \langle b_2\rangle \oplus \langle b_3\rangle$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $V$ ist, dann gilt $V = \langle b_1, b_2\rangle \oplus \langle b_2, b_3\rangle$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in $V$ und $(b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$ eine Basis von $V$ ist, dann ist auch $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 2 | Es sei $K := \underline{7}$ der Körper mit 7 Elementen und $K[X]$ die Polynomalgebra über $K$. | |
| | $K[X]$ ist als $K$-Vektorraum 7-dimensional. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Zu jedem Polynom $q \in K[X]$ gibt es ein Element $a \in K$ mit $q(a) = 0$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Der Grad der Differenz zweier Polynome ungleich 0 aus $K[X]$ ist gleich dem Minimum der Grade der beiden Polynome. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Das Polynom $X + 5$ ist in $K[X]$ ein größter gemeinsamer Teiler der Polynome $X^2 + 6X + 5$ und $X^2 + 2X + 2$. (Beachten Sie $K = \underline{7}$.) | ☐ Ja ☐ Nein |
| 3 | Es seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ Basen eines 2-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V$, die gemäß ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ auseinander hervor gehen. | |
| | Gibt es einen Vektor $x \in V$ mit ${}_{\mathcal{B}}x = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, ${}_{\mathcal{C}}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ${}_{\mathcal{D}}x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$? | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{D}}\varphi^{\mathcal{D}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 18 \end{bmatrix}$? | ☐ Ja ☐ Nein |
| 4 | Wir betrachten die symmetrische reelle $3 \times 3$-Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und die Abbildung $\alpha := (x \mapsto x^{tr}Ax)\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$. | |
| | Ist $\alpha$ linear? | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\alpha$ eine affine Vektorabbildung? | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Es sei $\Gamma$ die Bilinearform auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$, deren Gram-Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S}$ gerade $A$ ist. Ist $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \Gamma)$ ein euklidischer Vektorraum? | ☐ Ja ☐ Nein |
| 5 | Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi$ ein invertierbarer Endomorphismus von $V$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Wenn $x \in V$ ein Eigenvektor von $\varphi$ ist, dann ist $x$ auch ein Eigenvektor von $\varphi^{-1}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $T^{tr}GT$ eine Diagonalmatrix ist. | ☐ Ja ☐ Nein |

**Nachholklausur Lineare Algebra I (Prof. Dr. U. Schoenwaelder), 25.4.2003** **Gruppe B**

**Ergebnisteil.** Tragen Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

**6** Gegeben ist die Matrix $P := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Berechnen Sie die zu $P$ inverse Matrix $P^{-1} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$. *(4 Punkte)*

**7** Der Endomorphismus $\varphi$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V$ habe bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $-4$ und $-2$. Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis $\mathcal{C}$ von $\varphi$, geben Sie aber nur die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ an. *(4 Punkte)*

**8** Es sei $V$ ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\underline{13} = \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ mit 13 Elementen und $(\mathcal{P}, V, *)$ ein affiner Raum über $V$. Wir wählen einen festen Punkt $U \in \mathcal{P}$ und eine feste Gerade $g$ durch $U$.

(a) Wie viele Punkte liegen auf $g$? ☐ *(1 Punkt)*

(b) Wie viele Geraden sind parallel zu $g$? ☐ *(2 Punkte)*

(c) Wie viele Geraden gehen durch $U$? ☐ *(2 Punkte)*

**9** In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ sei der Endomorphismus $\varphi$ gegeben durch seine Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Welchen Grad hat das Minimalpolynom von $\varphi$? ☐ *(2 Punkte)*

Welche Dimensionen haben die Haupträume von $\varphi$? ☐ *(2 Punkte)*

**Schriftlicher Teil.** Beantworten Sie die Aufgaben 10 bis 13 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**10** Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Bild einer linearen Abbildung“.
[Geben Sie dabei alle Voraussetzungen an und schreiben Sie in vollständigen Sätzen. Vergessen Sie nicht „für alle“ bzw. „es gibt“.] *(4 Punkte)*

**11** Gegeben seien $K$-Vektorräume $V$ und $W$ mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ und Vektoren $x, y \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage „Ist $(\varphi(x), \varphi(y))$ eine linear unabhängige Folge, so ist auch die Folge $(x, y)$ linear unabhängig.“ [Stellen Sie den logischen Aufbau Ihrer Argumentation unmissverständlich dar.] *(4 Punkte)*

**12** Für jede $n\times n$-Matrix $M \in K^{n\times n}$ über einem Körper $K$ bezeichnen wir mit $\varphi_M$ die lineare Abbildung $\varphi_M = (x \mapsto Mx) \colon K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$. Wir betrachten Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$. Der Spaltenraum $K^{n\times 1}$ besitze eine Basis, die gleichzeitig Eigenvektorbasis bezüglich $\varphi_A$ und bezüglich $\varphi_B$ ist. Zeigen Sie, dass $AB = BA$ ist. *(4 Punkte)*

**13** Das Minimalpolynom $m(X)$ eines Endomorphismus $\varphi$ eines $K$-Vektorraums $V$ habe die Form $m(X) = u(X)\cdot v(X)$ mit teilerfremden Polynomen $u(X), v(X) \in K[X]$. Berechnen Sie für den Fall $K = \underline{2}$ und $u(X) = X^2 + 1$ und $v(X) = X^2 + X + 1$ Polynome $s(X)$ und $t(X)$, für die sich jeder Vektor $x \in V$ in der Form $x = (u(\varphi)\circ s(\varphi))(x) + (v(\varphi)\circ t(\varphi))(x)$ schreiben lässt. *(4 Punkte)*