Nachholklausur Lineare Algebra I (Prof. Dr. U. Schoenwaelder), 25.4.2003

Gruppe B

Name: ________________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Ankreuzteil. Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja" oder „Nein" oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine linear unabhängige Folge von Vektoren in V und (c_1, c_2, c_3) ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in V und (c_1, c_2) ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist $\mathcal{B}$ linear abhängig.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V ist, dann gilt $V = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \langle b_3 \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V ist, dann gilt $V = \langle b_1, b_2 \rangle \oplus \langle b_2, b_3 \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in V und $(b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$ eine Basis von V ist, dann ist auch $\mathcal{B}$ eine Basis von V.	☐ Ja	☐ Nein

2	Es sei $K := \underline{7}$ der Körper mit 7 Elementen und $K[X]$ die Polynomalgebra über K.		
	$K[X]$ ist als K-Vektorraum 7-dimensional.	☐ Ja	☐ Nein
	Zu jedem Polynom $q \in K[X]$ gibt es ein Element $a \in K$ mit $q(a) = 0$.	☐ Ja	☐ Nein
	Der Grad der Differenz zweier Polynome ungleich 0 aus $K[X]$ ist gleich dem Minimum der Grade der beiden Polynome.	☐ Ja	☐ Nein
	Das Polynom $X + 5$ ist in $K[X]$ ein größter gemeinsamer Teiler der Polynome $X^2 + 6X + 5$ und $X^2 + 2X + 2$. (Beachten Sie $K = \underline{7}$.)	☐ Ja	☐ Nein

3	Es seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ Basen eines 2-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums V, die gemäß $_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ auseinander hervor gehen.		
	Gibt es einen Vektor $x \in V$ mit $_{\mathcal{B}}x = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $_{\mathcal{C}}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $_{\mathcal{D}}x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$?	☐ Ja	☐ Nein
	Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ und $_{\mathcal{D}}\varphi^{\mathcal{D}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 18 \end{bmatrix}$?	☐ Ja	☐ Nein

4	Wir betrachten die symmetrische reelle 3×3-Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und die Abbildung $\alpha := (x \mapsto x^{tr}Ax)\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$.		
	Ist α linear?	☐ Ja	☐ Nein
	Ist α eine affine Vektorabbildung?	☐ Ja	☐ Nein
	Es sei Γ die Bilinearform auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$, deren Gram-Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S}$ gerade A ist. Ist $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \Gamma)$ ein euklidischer Vektorraum?	☐ Ja	☐ Nein

5	Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und φ ein invertierbarer Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Wenn $x \in V$ ein Eigenvektor von φ ist, dann ist x auch ein Eigenvektor von φ^{-1}.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $T^{tr}GT$ eine Diagonalmatrix ist.	☐ Ja	☐ Nein

Ergebnisteil. Tragen Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

6	Gegeben ist die Matrix $P := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Berechnen Sie die zu P inverse Matrix $P^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$. *(4 Punkte)*
7	Der Endomorphismus φ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums V habe bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind -4 und -2. Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis $\mathcal{C}$ von φ, geben Sie aber nur die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ an. *(4 Punkte)*
8	Es sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\underline{13} = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ mit 13 Elementen und $(\mathcal{P}, V, *)$ ein affiner Raum über V. Wir wählen einen festen Punkt $U \in \mathcal{P}$ und eine feste Gerade g durch U. (a) Wie viele Punkte liegen auf g? ☐ *(1 Punkt)* (b) Wie viele Geraden sind parallel zu g? ☐ *(2 Punkte)* (c) Wie viele Geraden gehen durch U? ☐ *(2 Punkte)*
9	In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ sei der Endomorphismus φ gegeben durch seine Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Welchen Grad hat das Minimalpolynom von φ? ☐ *(2 Punkte)* Welche Dimensionen haben die Haupträume von φ? ☐ *(2 Punkte)*

Schriftlicher Teil. Beantworten Sie die Aufgaben 10 bis 13 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10	Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Bild einer linearen Abbildung“. [Geben Sie dabei alle Voraussetzungen an und schreiben Sie in vollständigen Sätzen. Vergessen Sie nicht „für alle“ bzw. „es gibt“.] *(4 Punkte)*
11	Gegeben seien K-Vektorräume V und W mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ und Vektoren $x, y \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage „Ist $(\varphi(x), \varphi(y))$ eine linear unabhängige Folge, so ist auch die Folge (x, y) linear unabhängig.“ [Stellen Sie den logischen Aufbau Ihrer Argumentation unmissverständlich dar.] *(4 Punkte)*
12	Für jede $n \times n$-Matrix $M \in K^{n\times n}$ über einem Körper K bezeichnen wir mit φ_M die lineare Abbildung $\varphi_M = (x \mapsto Mx) \colon K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$. Wir betrachten Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$. Der Spaltenraum $K^{n\times 1}$ besitze eine Basis, die gleichzeitig Eigenvektorbasis bezüglich φ_A und bezüglich φ_B ist. Zeigen Sie, dass $AB = BA$ ist. *(4 Punkte)*
13	Das Minimalpolynom $m(X)$ eines Endomorphismus φ eines K-Vektorraums V habe die Form $m(X) = u(X) \cdot v(X)$ mit teilerfremden Polynomen $u(X), v(X) \in K[X]$. Berechnen Sie für den Fall $K = \underline{2}$ und $u(X) = X^2 + 1$ und $v(X) = X^2 + X + 1$ Polynome $s(X)$ und $t(X)$, für die sich jeder Vektor $x \in V$ in der Form $x = (u(\varphi) \circ s(\varphi))\,(x) + (v(\varphi) \circ t(\varphi))\,(x)$ schreiben lässt. *(4 Punkte)*