2. Nachholklausur zur Linearen Algebra I (8. 4. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle" oder „es gibt ein" wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Wieviele injektive Vektorraum-Homomorphismen $\pi\colon \mathbf{V}_{2\times1}(\mathbb{Z}_3) \longrightarrow \mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{Z}_3)$ gibt es? *5 Punkte*

Aufgabe 2.
Im $\mathbb{Z}_2$–Vektorraum $V := \mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{Z}_2)$ sei der Vektor $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Wieviele Teilräume hat der Faktorraum $V/\langle X\rangle$? *3 Punkte*

b) Wieviele Teilräume von V gibt es, die den Vektor X enthalten? *4 Punkte*

Aufgabe 3.
Invertieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3\times3}(\mathbb{Q})$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Gegeben seien die Vektoren $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4\times1}(\mathbb{R})$ und $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{2\times1}(\mathbb{R})$ sowie die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbf{V}_{4\times1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{V}_{2\times1}(\mathbb{R})$, die bezüglich der Standard-Basisfolgen $\mathcal{S}_4$ und $\mathcal{S}_2$ durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{S}_2, \alpha, \mathcal{S}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

a) Berechnen Sie $\alpha(X_1)$. *1 Punkt*

b) Berechnen Sie die Menge aller Urbilder von Y. *3 Punkte*

c) Ist die von α auf dem Teilraum $U = \langle X_1, X_2\rangle$ bewirkte Abbildung $\alpha|_U\colon U \longrightarrow \mathbf{V}_{2\times1}(\mathbb{R})$ injektiv? *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Auf $V = \mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{R})$ betrachten wir das Skalarprodukt Γ mit $M := \mathrm{M}(\mathcal{S}, \Gamma, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $\mathcal{S}$ die Standard-Basisfolge bezeichnet.

a) Berechnen Sie den Orthogonalraum U zum Teilraum $T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ in V. *4 Punkte*

b) Berechnen Sie eine Orthogonal-Basisfolge für den durch $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ erzeugten Teilraum W von V. *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Ist das Skalarprodukt Γ auf $\mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{R})$ aus Aufgabe 5 positiv definit? *6 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $\Gamma\colon V \times V \longrightarrow K$ eine (feste) nicht ausgeartete Bilinearform auf einem K-Vektorraum V (K kommutativ). Wir ordnen jeder linearen Abbildung $\alpha\colon V \longrightarrow V$ die Bilinearform Γ_α mit

$$\Gamma_\alpha(Y,X) = \Gamma(\alpha(Y),X) \quad \text{für} \quad Y,X \in V$$

zu. Ist diese Zuordnung

$$f := (\alpha \longmapsto \Gamma_\alpha)\colon \mathrm{Hom}^\circ(V,V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V)$$

zwischen dem K-Vektorraum $\mathrm{Hom}^\circ(V,V)$ aller linearen Abbildungen auf V und dem K-Vektorraum $\mathrm{Bil}(V)$ aller Bilinearformen auf V

a) linear, *3 Punkte*

b) injektiv? *5 Punkte*

Aufgabe 8.
Gegeben sei eine Basisfolge $\mathcal{B}$ des Vektorraums $V = \mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{R})$. Wir betrachten den Isomorphismus $\pi: V \longrightarrow V^*$, der $\mathcal{B}$ auf die duale Basisfolge $\mathcal{B}^*$ abbildet. Es sei $X \in V$ der Vektor mit $\mathrm{M}(\mathcal{B},X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und es sei $f := \pi(X) \in V^*$ sein Bild unter π.

Berechnen Sie den Wert $f(X)$ (also $\pi(X)(X)$). *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Auf dem Intervall $I = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$ seien die Funktionen $l, m, f \in \mathbb{R}^I$ mit den folgenden Werten gegeben.

	für $x \in [0,1)$	für $x \in [1,2]$
$l(x)$	1	0
$m(x)$	0	1
$f(x)$	x^2	x^2

Approximieren Sie die Funktion f durch eine Funktion im Teilraum $T = \langle l, m\rangle$ bezüglich des durch

$$\Gamma(g,h) = \int_0^2 g(x)h(x)dx.$$

gegebenen Skalarprodukts. (Ergebnis formulieren.) *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Berechnen Sie eine gute Ersatzlösung für das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{rcrcr} 0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & = & -4 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & = & 1 \\ 4\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & = & 2 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 11.
Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Determinantenform“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) *3 Punkte*

Aufgabe 12.
Im Vektorraum $\mathbf{V}_{3\times1}(\mathbb{R})$ seien zwei Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ durch ihre Matrizen $\mathrm{M}(\mathcal{S},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{M}(\mathcal{S},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standard-Basisfolge $\mathcal{S}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen. *2 Punkte*

b) Sind die beiden Basisfolgen gleich orientiert? (Mit Beweis.) *4 Punkte*
