1. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (3. 12. 93)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, daß der Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ zu keinem Körper gemacht werden kann. *2 Punkte*

Aufgabe 2.
Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbf{V}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ seien die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Ist die Folge (A_1, A_2, A_3) linear unabhängig? (Antwort mit Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $F(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von $F(\mathbb{R})$ sind Teilräume? (Jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

a) $M_1 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1) + f(1) = 1 \}$ *2 Punkte*

b) $M_2 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1)^2 = f(1)^2 \}$ *3 Punkte*

c) $M_3 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1)^2 + f(1)^2 = 0 \}$ *3 Punkte*

Aufgabe 4.
In einem n-dimensionalen K-Vektorraum V seien Vektoren A, B, C und X, Y, Z gegeben, so daß jede der Folgen (A, B), (A, C) und (B, C) sowie jede der Mengen $\{X, Y\}$, $\{X, Z\}$ und $\{Y, Z\}$ linear unabhängig sind. Beweisen oder widerlegen Sie (konkretes Gegenbeispiel) jede der folgenden Aussagen.

a) Ist $n = 2$, so ist die Folge (A, B, C) linear abhängig. *1 Punkt*

b) Ist $n = 2$, so ist die Menge $\{X, Y, Z\}$ linear abhängig. *2 Punkte*

c) Ist $n = 3$, so ist die Folge (A, B, C) linear unabhängig. *2 Punkte*

d) Ist $n = 3$, so ist die Menge $\{X, Y, Z\}$ linear unabhängig. *1 Punkt*

Aufgabe 5.
Bekanntlich bildet die Folge $(p_0, p_1, \ldots, p_7)$ der Potenzfunktionen $p_i = (x \mapsto x^i)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $P_7(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 7. Gibt es eine Basis von $P_7(\mathbb{R})$, in der die Funktionen $f_1 = x^3 + x^2 + 4$, $f_2 = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, $f_3 = x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ vorkommen und sonst nur Potenzfunktionen? (Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Formulieren Sie eine Definition der linearen Unabhängigkeit einer endlichen Folge von Vektoren. (Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie benutzen, zu erklären.)
2 Punkte

Aufgabe 7.
Formulieren Sie den Austauschsatz von E. Steinitz. (Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie benutzen, zu erklären.) *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems über dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_1 \cdot x_1 & + & \alpha_1 \cdot x_2 & + & \alpha_2 \cdot x_3 & + & \alpha_1 \cdot x_4 & + & \alpha_0 \cdot x_5 & = & \alpha_2 \\ \alpha_0 \cdot x_1 & + & \alpha_2 \cdot x_2 & + & \alpha_2 \cdot x_3 & + & \alpha_2 \cdot x_4 & + & \alpha_1 \cdot x_5 & = & \alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot x_1 & + & \alpha_0 \cdot x_2 & + & \alpha_1 \cdot x_3 & + & \alpha_2 \cdot x_4 & + & \alpha_2 \cdot x_5 & = & \alpha_2 \\ \alpha_2 \cdot x_1 & + & \alpha_2 \cdot x_2 & + & \alpha_1 \cdot x_3 & + & \alpha_0 \cdot x_4 & + & \alpha_2 \cdot x_5 & = & \alpha_2, \end{array}$$

wobei jeweils $\alpha_i = i + \mathbb{Z} \cdot 3 \in \mathbb{Z}_3$ ist. Benutzen Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Schema (mit Angabe der Rechenschritte) und geben Sie $\mathcal{L}$ in der in der Vorlesung hergeleiteten Form an. Sie dürfen i statt α_i schreiben. *5 Punkte*

Aufgabe 9.
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten über einem beliebigen Körper K. Beweisen Sie:

a) Ist das System homogen, so besitzt es mindestens zwei Lösungen. *2 Punkte*

b) Ist es inhomogen, so hat es entweder keine oder mindestens zwei Lösungen. *1 Punkt*

Aufgabe 10.
Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{353}$ zur Primzahl 353 sei das Element $\alpha_{151} := 151 + \mathbb{Z} \cdot 353$ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus das Element $(\alpha_{151})^{-1}$. *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $V := \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{Q})$ und $U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Berechnen Sie eine Basis von V/U.
5 Punkte

Aufgabe 12.
In einem affinen Raum M über einem Vektorraum V seien Hyperebenen $N = p \star \mathcal{T}(N)$ und $L = q \star \mathcal{T}(L)$ gegeben. Zeigen Sie: Für jede Hyperebene K, die die Hyperebenen N und L umfaßt, gilt $\mathcal{T}(K) \supseteq \mathcal{T}(N) + \mathcal{T}(L) + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$. *3 Punkte*