Aufgabenblatt 1 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Formulieren Sie eine Definition für die Begriffe „Bilinearform", „Skalarprodukt" und „ausgeartetes Skalarprodukt". (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) *4 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei F der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

a) Ist $M_1 = \{f \in F \mid f(2) \cdot f(3) = f(6)\}$ ein Teilraum von F? *2 Punkte*

b) Ist $M_2 = \{f \in F \mid f(2) + f(3) = f(5)\}$ ein Teilraum von F? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

Aufgabe 3.

Wir betrachten lösbare inhomogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{Z}_7$ mit 7 Elementen. Bestimmen Sie die natürliche Zahl n, für die die beiden folgenden Aussagen gelten.

(1) Jedes solche System hat mindestens n Lösungen.

(2) Nicht jedes solche System hat mindestens $n + 1$ Lösungen.

(Geben Sie ausführliche Beweise für beide Eigenschaften.) *7 Punkte*

Aufgabe 4.

Im Vektorraum $V = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ mit 5 Elementen sei der Teilraum

$$T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

gegeben. Geben Sie eine Basisfolge für den Faktorraum V/T an. (Formulierung und Begründung sind wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 5.

Invertieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. *5 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.

Es sei V der Vektorraum $\mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

a) Geben Sie, falls möglich, zwei 3-dimensionale Teilräume T_1, T_2 von V an mit $T_1 \cap T_2 = \{0\}$.
3 Punkte

b) Geben Sie, falls möglich, drei 2-dimensionale Teilräume U_1, U_2, U_3 von V an, die paarweise den Durchschnitt $\{0\}$ haben.
4 Punkte

c) Gibt es zweihundert 1-dimensionale Teilräume in V, die paarweise den Durchschnitt $\{0\}$ haben?
3 Punkte

(Antwort jeweils mit Begründung. Achten Sie auf die Formulierung.)

Aufgabe 7.

Wieviele lineare Abbildungen $\alpha\colon \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{Q})$ gibt es, welche folgendermaßen abbilden?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Mit Beweis.)
3 Punkte

Aufgabe 8.

Es sei $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basisfolge von $V = \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ und $\Phi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ das durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bestimmte Skalarprodukt auf V. Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasisfolge $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie

a) die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{C}, \Phi, \mathcal{C})$,

b) die Basiswechselmatrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ und

c) die Basisvektoren C_1, C_2, C_3 als Ausdrücke in B_1, B_2, B_3 an.
5 Punkte

Aufgabe 9.

In Aufgabe 8 hätten wir auch das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden können. Aber das funktioniert nicht immer.

a) Warum nicht?
2 Punkte

b) Es sei $V = \mathbf{V}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ mit $n > 1$ und Φ ein Skalarprodukt auf V. Geben Sie für Φ eine hinreichende Bedingung dafür an, daß man aus <u>jeder</u> Basisfolge $\mathcal{B}$ von V mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthogonalbasisfolge von V bezüglich Φ berechnen kann. (Mit Begründung.)
2 Punkte

Aufgabenblatt 3 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 10.

Es sei $E = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$, und es sei f die Funktion in $\mathbb{R}^E$ mit den folgenden Werten.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	4	3	0	-10

Bestimmen Sie diejenige quadratische Funktion $g(x) = ax^2 + bx + c$ auf E (also diejenige Funktion g aus dem von den Potenzfunktionen p_0, p_1, p_2 aufgespannten Teilraum von $\mathbb{R}^E$), die die beste Approximation der Funktion f bezüglich des durch

$$\Gamma(g, h) = \sum_{x \in E} g(x)h(x)$$

gegebenen Skalarprodukts liefert. (Wir empfehlen, für jede in der Rechnung auftretende Funktion die gegebene Wertetabelle um die entsprechende Zeile zu ergänzen.) *8 Punkte*

Aufgabe 11.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. *4 Punkte*

Aufgabe 12.

Es sei R ein kommutativer Ring-mit-1, und es sei a ein Nullteiler von R. Zeigen Sie, daß a in R kein (multiplikatives) Inverses besitzt. (Die Formulierung ist wichtig.) *3 Punkte*

Aufgabe 13.

Wir betrachten im Restklassenring $\mathbb{Z}_{111}$ die Restklasse $\overline{70}$, die die Zahl 70 enthält. Berechnen Sie zu $\overline{70}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation. *4 Punkte*

Aufgabe 14.

Es sei V der Vektorraum $\mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$. Die lineare Abbildung $\beta\colon V \longrightarrow V$ sei bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S}$ von V durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{S}, \beta, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Gibt es in V einen 1-dimensionalen, β-invarianten Teilraum T (d. h. $\beta(T) \leq T$)?

b) Gibt es in V einen 2-dimensionalen, β-invarianten Teilraum U (d. h. $\beta(U) \leq U$), dessen sämtliche 1-dimensionale Teilräume ebenfalls β-invariant sind?

(Denken Sie daran, daß wir über dem Körper mit 3 Elementen rechnen!) *7 Punkte*
