Nachholklausur zur Linearen Algebra I (9. 4. 99)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 12 gegebenen Aufgaben für insgesamt 74 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Gibt es in einem geeigneten Vektorraum eine linear abhängige Folge von vier Vektoren, von denen je drei (in der gegebenen Reihenfolge) eine linear unabhängige Folge bilden?

(Beispiel oder Beweis der Unmöglichkeit.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & + & 1\cdot x_4 & = & 2 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & + & 2\cdot x_4 & = & 1 \\ 1\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & + & 1\cdot x_4 & = & -1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Menge M aller Lösungen, und stellen Sie sie als Restklasse nach einem geeigneten Teilraum U in einem geeigneten Vektorraum V dar. Was ist V? Was ist U?

(b) Betrachten Sie M nun als Vektor im Vektorraum $W = V/U$ aller Restklassen von V nach U. Bestimmen Sie eine Basis von W. (Mit Begründung.) *5 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$, $T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle$.

(a) Geben Sie eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ an, so dass $\operatorname{Kern}\varphi = T_1$ und $\operatorname{Bild}\varphi = T_2$ ist.

(b) Ist φ eindeutig bestimmt? (Antwort mit Begründung.) *3 + 2 = 5 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der beiden folgenden Abbildungen φ und ψ von V nach V sind linear?

(a) $\varphi(f) = (x \mapsto f(x) + 5 \text{ für } x \in \mathbb{R})$ für $f \in V$,

(b) $\psi(f) = (x \mapsto f(x) \cdot 5 \text{ für } x \in \mathbb{R})$ für $f \in V$.

Antwort jeweils mit Begründung. *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei F_3 ein Körper mit 3 und F_7 ein Körper mit 7 Elementen. Wir betrachten in $F_3^{1\times 6}$ ein Komplement A zum Teilraum $\langle [0,1,2,0,1,2] \rangle$ und in $F_7^{4\times 1}$ den Faktorraum $B = F_7^{4\times 1}/W$ nach dem Teilraum $W = \langle [1,1,1,1]^{tr} \rangle$. Welcher der Vektorräume A und B enthält mehr Vektoren? *4 Punkte*

Aufgabe 6.

Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Matrix $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -11 \\ -8 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluss die Matrix A^{-1} explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche (das Ergebnis ist ganzzahlig).

5 Punkte

Aufgabe 7.
Gegeben seien zwei Matrizen $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basisfolge $\mathcal{B}$. Weiter seien in V eine lineare Abbildung φ, eine Bilinearform Φ und zwei Vektoren v_1, v_2 gegeben mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = [\,{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2\,] = A_1$.

(a) Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von V mit ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = A_2$?

(b) Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von V mit ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A_2$?

(c) Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von V mit $[\,{}_{\mathcal{C}}v_1, {}_{\mathcal{C}}v_2\,] = A_2$?

Auf die sorgfältige und vollständige Argumentation kommt es an. *4 + 3 + 3 = 10 Punkte*

Aufgabe 8.
Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Orthogonalprojektion“.

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen müssen angegeben sein, und für alle auftretenden Namen (wie z. B. V oder v) muss gesagt werden, was für Objekte sie bezeichnen. *3 Punkte*

Aufgabe 9.
Auf einem 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ sei ein Skalarprodukt Φ durch ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Sylvesterbasis $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ von V bezüglich Φ. Geben Sie dabei jeweils kurz (also ohne viel Text) an, welche Umformungen Sie benutzen, und geben Sie am Schluss die Basis $\mathcal{C}$ sowie die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(b) Bestimmen Sie die beste Approximation (bezüglich Φ) des Vektors b_3 im Teilraum $\langle b_1, b_2 \rangle$ von V.

7 + 4 = 11 Punkte

Aufgabe 10.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$ seien eine Bilinearform Φ und ein Endomorphismus φ durch die Matrizen ${}^{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{S}}\varphi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass (V, Φ) ein euklidischer Vektorraum ist.

(b) Finden Sie einen Vektor v, so dass $\varphi(e_1)$ und $\varphi(v)$ bezüglich Φ orthogonal sind.

(c) Welches Winkelmaß hat das Vektorpaar $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$? *4 + 3 + 5 = 12 Punkte*

Aufgabe 11.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$ sei durch ${}_{\mathcal{S}}\varphi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$ eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ gegeben. Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass jeder Vektor v aus $\mathcal{B}$ durch φ auf einen Vektor $v\lambda$ mit $\lambda \in \{-3, -1, 0, 2\}$ abgebildet wird?

Untersuchen Sie die Frage mit den Mitteln der Vorlesung. Wichtig sind die Erläuterung Ihres Ansatzes und die Begründungen. *5 Punkte*

Aufgabe 12.
Das durch die Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ aufgespannte Parallelotop (Einheitswürfel) habe das Volumen 7. Welches Volumen hat dann das von $\varphi(\mathcal{S})$ aufgespannte Bild-Parallelotop unter der linearen Abbildung φ, die durch

$$\varphi(e_1) = 2\,e_1 + 3\,e_2, \qquad \varphi(e_2) = -\,e_1 - 5\,e_2, \qquad \varphi(e_3) = 5\,e_3, \qquad \varphi(e_4) = 2\,e_4$$

definiert wird? *3 Punkte*