Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil A (18. 12. 98)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 13 gegebenen Aufgaben für insgesamt 54 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Formulieren Sie eine explizite Definition für den Begriff „linear abhängig“. (Sie sollen also nicht schreiben: „Nicht linear unabhängig“.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Gibt es im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ drei Vektoren u, v, w, so dass zwar alle Paare (u, v), (u, w) und (v, w) linear unabhängig sind, aber die Folge (u, v, w) linear abhängig ist?
(Beweis der Unmöglichkeit oder Beispiel.) *3 Punkte*

Aufgabe 3.
Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums $V = \mathbb{R}^{1\times 4}$ sind Teilräume von V?

(a) $M_1 = \{\, [\, a_1, a_2, a_3, a_4 \,] \in V \mid a_1^{\,2} + a_3^{\,4} = 0 \,\}$,

(b) $M_2 = \{\, [\, a_1, a_2, a_3, a_4 \,] \in V \mid a_2^{\,1} + a_4^{\,3} = 0 \,\}$.

(Antwort jeweils mit Begründung.) *3 + 2 = 5 Punkte*

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5\cdot x_1 & + & 10\cdot x_2 & - & 8\cdot x_3 & + & 11\cdot x_4 & = & 12 \\ 2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & - & 3\cdot x_3 & + & 4\cdot x_4 & = & 5 \\ 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & 2\cdot x_3 & + & 3\cdot x_4 & = & 2 \end{array}$$

5 Punkte

Aufgabe 5.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}$.

(a) Bestimmen Sie die Gauß-Jordan-Basis des Zeilenraums $\mathrm{Zr}\, A$.

(b) Es sei $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_5)$ die Folge der Spalten von A. Bestimmen Sie eine Teilfolge von $\mathcal{A}$, die eine Basis von $\langle\, \mathcal{A} \,\rangle$ ist. *3 + 1 = 4 Punkte*

Aufgabe 6.

(a) S und T seien 2-dimensionale Teilräume eines Vektorraums V über einem Schiefkörper K. Welche Dimensionen können die Teilräume $S \cap T$ und $S + T$ haben?
Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Mit Begründung.)

(b) Es sei nun konkret $V = P_5(\mathbb{R})$ der (6-dimensionale) $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 5 über $\mathbb{R}$. Geben Sie für jede der Möglichkeiten aus (a) ein Beispiel an.
(Ohne Beweis, aber natürlich in vollständigen Sätzen.) *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei p eine Primzahl, $\mathbb{Z}_p$ der Restklassenring modulo p und $\overline{a}$ ein Element aus $\mathbb{Z}_p$ mit $\overline{a} \neq \overline{0}$.

(a) Wie ist $\mathbb{Z}_p$ als Menge definiert?

(b) Bekanntlich ist $\mathbb{Z}_p$ ein Körper, also gibt es in $\mathbb{Z}_p$ ein Element $\overline{a}^{\,-1}$. Beschreiben Sie mit wenigen kurzen Sätzen, wie und warum man $\overline{a}^{\,-1}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen kann.
Hinweis: Sie sollen nicht den euklidischen Algorithmus beschreiben. *1 + 3 = 4 Punkte*

Aufgabe 8.
Wir betrachten die Abbildung $\alpha = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \right) \colon\ \mathbb{Z}_7^{4\times 1} \to \mathbb{Z}_7$. Geben Sie zu jedem Element $y \in \text{Bild}\,(\alpha)$ die Urbildmenge $\alpha^{-}(y)$ an. Wie viele Elemente hat $\alpha^{-}(y)$ jeweils?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele solche Mengen Sie angeben sollen und wie Sie die Menge $\alpha^{-}(y)$ knapp und trotzdem explizit angeben. *6 Punkte*

Aufgabe 9.
Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{Z}_5^{1\times 4}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ mit 5 Elementen und in V der Teilraum

$$T = \langle\, [\,\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\,],\ [\,\overline{2}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\,],\ [\,\overline{3}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{3}\,]\,\rangle.$$

Berechnen Sie eine Basisfolge von T, ergänzen Sie sie zu einer Basisfolge von V, und bestimmen Sie eine Basisfolge von V/T. *4 Punkte*

Aufgabe 10.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $F(\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachten wir den von den Funktionen $s_1 = (x \mapsto \sin(x))$, $s_2 = (x \mapsto \sin(2x))$, $s_3 = (x \mapsto 2\sin(x))$ erzeugten Teilraum $V = \langle\, s_1, s_2, s_3\,\rangle$. Geben Sie einen zu V isomorphen $\mathbb{R}$-Vektorraum W an, der nicht Teilraum von $F(\mathbb{R})$ ist.
(Ohne Beweis.) *2 Punkte*

Aufgabe 11.
Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+1 \\ b \end{bmatrix} \right) \colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ injektiv, surjektiv, bijektiv, linear ist. *3 Punkte*

Aufgabe 12.
Geben Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung α an, für die Kern (α) und Cokern (α) die Dimension 1 haben. (Es kommt auf die Formulierung an. Die Linearität Ihrer Abbildung brauchen Sie nicht zu beweisen.) *3 Punkte*

Aufgabe 13.
In einem affinen Raum $\mathcal{P}$ über dem 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\langle\, p_0, p_1\,\rangle$ der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 1 seien ein Punkt P als Ursprung und weitere vier Punkte A_1, B_1, A_2, B_2 durch ihre Vektoren

$$\overrightarrow{PA_1} = p_0 \cdot 1 - p_1 \cdot 3, \qquad \overrightarrow{PB_1} = p_0 \cdot 2 - p_1 \cdot 1,$$
$$\overrightarrow{PA_2} = p_0 \cdot 5 + p_1 \cdot 2, \qquad \overrightarrow{PB_2} = p_0 \cdot 3 - p_1 \cdot 1$$

gegeben. Berechnen Sie, falls er existiert, den Schnittpunkt S der Geraden A_1B_1 und A_2B_2.
7 Punkte
