Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B (17. 2. 99)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 78 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten (die beiden letzten Aufgaben sind etwas schwieriger). Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und Z die Zeilenumformung $Z_2 \mid Z_2 - 3\,Z_1$. Schreiben Sie die umgeformte Matrix $Z(A)$ als Matrixprodukt mit A. *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Gegeben seien ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V, eine lineare Abbildung φ und eine Bilinearform Φ von V, zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$, zwei Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V mit der Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und die drei Matrizen $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass in der Menge $M := \{A_1, A_2, A_3\}$ sowohl die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ und $[\,{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2\,]$ als auch die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$, ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ und $[\,{}_{\mathcal{C}}v_1, {}_{\mathcal{C}}v_2\,]$ alle vorkommen.

(a) Bestimmen Sie in M die Matrizen $[\,{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2\,]$, ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$, soweit sie eindeutig identifizierbar sind.
(Schreiben Sie die während der Rechnung auftretenden Matrizen möglichst übersichtlich hin, und formulieren Sie die Ergebnisse aus. Es reicht nicht, dass die Ergebnisse richtig sind, die Argumentation ist wichtig.)

(b) Berechnen Sie $\Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$. *16 + 3 = 19 Punkte*

Aufgabe 3.

Auf einem 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ sei ein Skalarprodukt Φ durch ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Sylvesterbasis $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ von V bezüglich Φ. Geben Sie dabei jeweils kurz (also ohne viel Text) an, welche Umformungen Sie benutzen, und geben Sie am Schluss die Basis $\mathcal{C}$ sowie die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(b) Eine zweite Bilinearform Ψ auf V sei durch ${}^{\mathcal{C}}\Psi_{\mathcal{C}} = {}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ gegeben. Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\Psi(x, y) = \Phi(\varphi(x), \varphi(y))$ für alle $x, y \in V$?
(Antwort mit Beweis.) *6 + 4 = 10 Punkte*

Aufgabe 4.
Welche der folgenden Bilinearformen Φ definieren einen euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum (V, Φ)?

(a) $V = \langle \sin, \cos \rangle$, $\Phi(x_1 \sin + x_2 \cos,\ y_1 \sin + y_2 \cos) = x_1 y_1 - 2\, x_1 y_2 - 2\, x_2 y_1 + 7\, x_2 y_2$ für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $V = P_1(\mathbb{R})$ (Polynomfunktionen vom Grad ≤ 1), $\mathcal{B} = (p_0, p_1)$, ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(Antwort jeweils mit Beweis.) *5 + 4 = 9 Punkte*

Aufgabe 5.
(V, Γ) sei ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und φ eine orthogonale lineare Abbildung von (V, Γ).

(a) Zeigen Sie, dass φ höchstens die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal bezüglich Γ sind.

(c) Geben Sie eine orthogonale lineare Abbildung eines euklidischen Vektorraums mit einem Eigenwert -1 an. *3 + 3 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von V. Auf V sei ein Skalarprodukt Φ durch ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 9 & -9 \\ -2 & 4 & -9 & 20 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ von V bezüglich Φ.

(b) Geben Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(c) Bestimmen Sie die beste Approximation des Vektors b_4 im Teilraum $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ von V. *7 + 4 + 2 = 13 Punkte*

Aufgabe 7.
Auf dem Intervall $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die reellwertigen stetigen Funktionen

$$p = (x \mapsto x) \quad \text{und} \quad q = (x \mapsto x^4).$$

Sie erzeugen einen 2-dimensionalen Teilraum T des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller stetigen Funktionen auf I. Wir versehen T mit dem Skalarprodukt

$$\Gamma(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \text{für} \quad f, g \in T.$$

Berechnen Sie Länge und gegenseitige Lage der Vektoren p und q in (T, Γ), und zeichnen (skizzieren) Sie p und q als Pfeile in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichlangen Einheitsstrecken. *8 Punkte*

Aufgabe 8.
Gegeben sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum V mit einer Bilinearform Φ. Untersuchen Sie die Abbildung $\gamma := (x \mapsto {}_x\Phi)\colon V \to V^*$, wobei ${}_x\Phi := (y \mapsto \Phi(x, y))\colon V \to K$ gesetzt ist. (Zum Beispiel: Wann ist γ injektiv?) *bis zu 7 Punkte*