# Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur

# Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

(a) Geben Sie ein Beispiel $V$ eines 16-dimensionalen Vektorraums, dessen Elemente Abbildungen sind. (Vergessen Sie nicht die formal korrekte Angabe der Operationen.)

(b) Geben Sie Teilräume $A$, $B$ Ihres Vektorraums $V$ an, die die Dimensionen 3 und 4 haben und wo $S := A + B$ die Dimension 5 hat. Welche Dimension hat $D := A \cap B$? *4 + 2 = 6 Punkte*

---

**Aufgabe 2.**

Stellen Sie sich einen Vektorraum mit einer endlichen Basisfolge $\mathcal{B}$ als gegeben vor. Weiter seien Teilräume $A$ und $B$ durch endliche Folgen von Erzeugenden gegeben, die überdies als Linearkombinationen in der Basisfolge $\mathcal{B}$ dargestellt sind. Wie prüft man, ob $A$ ein Teilraum von $B$ ist? *4 Punkte*

---

**Aufgabe 3.**

Je nach Wahl des reellen Parameters $t$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & - & (t+1) \cdot x_3 & = & -2 \\ 0 \cdot x_1 & + & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & t \\ 1 \cdot x_1 & - & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 2 - t \end{array}$$

unterschiedliche Lösungsmengen.

(a) Für welche Werte von $t$ ist das Gleichungssystem lösbar?

(b) Berechnen Sie in den lösbaren Fällen jeweils die Lösungsmenge $M$ und schreiben Sie sie als Element eines Faktorraums $F$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Welche Dimension hat $F$? *3 + 6 = 9 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem so gut wie es geht.

$$\begin{array}{rcrcl} 3\,x & + & 5\,y & = & 1 \\ 6\,x & + & 10\,y & = & 7. \end{array}$$

*5 bis 7 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Wir betrachten die quadratischen Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \\ 8 & 8 & 22 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie (multiplikativ) inverse Matrizen zu diesen Matrizen.

(b) Welche der durch $\alpha_i := (x \mapsto A_i\, x \text{ für } x \in \mathbb{R}^{3\times 1})\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ definierten Abbildungen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sind linear, welche injektiv, welche Isomorphismen?

(c) Auf einem 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ mit einer Basisfolge $\mathcal{B}$ seien zwei Skalarprodukte $\Phi$ und $\Psi$ durch ihre Matrizen ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A_2$ und ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = A_3$ gegeben. Welche dieser Skalarprodukte sind nicht ausgeartet, welche positiv definit? (Begründung.) *6 + 3 + 5 = 14 Punkte*

---

# Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur

# Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 5}$.

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi < \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi > \operatorname{Bild}\varphi$?

(Antwort jeweils mit Beispiel oder Beweis.) *3 Punkte*

---

**Aufgabe 7.**
Zur reellen $3 \times 5$-Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi = (x \mapsto Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^{5\times 1})\colon \mathbb{R}^{5\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$. Berechnen Sie eine Basisfolge von $\mathbb{R}^{3\times 1}/\operatorname{Bild}\varphi$. *6 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**
In einem $n$-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ seien Basisfolgen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie eine lineare Abbildung $\varphi$ und eine Bilinearform $\Phi$ gegeben, so dass ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A \in K^{n\times n}$ und ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = B \in K^{n\times n}$ gilt. Berechnen Sie für die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ jeweils eine Formel, die die gesuchte Matrix in $A$ und $B$ ausdrückt (und keine Klammern enthält). *5 Punkte*

---

**Aufgabe 9.**

(a) Geben Sie ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$ mit einer nicht ausgearteten Bilinearform $\Phi$ und einem Teilraum $W \leq V$, für den $V$ nicht die (innere) direkte Summe der Teilräume $W$ und $W^{\perp}$ ist.

(b) Gilt in Ihrem Beispiel die Formel $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$? *4 + 1 = 5 Punkte*

---

**Aufgabe 10.**

Auf dem reellen Intervall $I = [0, 1]$ sei die Funktion $f = (x \mapsto -x^2 + 1)\colon I \to I$ gegeben. Stellen sie sich vor, jemand fragt Sie: Welche der beiden Polynomfunktionen $g = (x \mapsto -x + 1)\colon I \to I$ und $h = (x \mapsto -x + \frac{5}{4})\colon I \to I$ vom Grad 1 approximiert $f$ „besser“? Da Sie wegen Ihrer Klausur wenig Zeit haben, überlassen Sie ihm das Rechnen und sagen ihm nur, welche Ausdrücke er ausrechnen soll. Welche? *4 Punkte*

---

**Aufgabe 11.**
Wie viele Geraden hat ein 3-dimensionaler affiner Raum (also ein affiner Raum über einem 3-dimensionalen Vektorraum) über dem Körper $\mathbb{Z}_2$? (Wie ergibt sich diese Anzahl?) *4 Punkte*

---

**Aufgabe 12.**
Wegen $4711 = 7 \cdot 673$ ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_{4711} = \mathbb{Z}/4711\,\mathbb{Z}$ kein Körper. Trotzdem besitzt die Restklasse, in der die Zahl 205 liegt, ein (multiplikativ) inverses Element (warum?). Berechnen Sie es (und erläutern Sie dabei Ihre Rechnung). *5 Punkte*

---

# Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
# **Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 13.**

Formulieren Sie den Satz von Dilworth für den Spezialfall eines Spernerposets $P$, und verifizieren Sie ihn am Hassediagramm eines rangsymmetrischen Spernerposets ihrer Wahl, welches $\mathcal{B}_3$ (=Poset der Teilmengen von $\{1,2,3\}$) als echtes induziertes Unterposet enthält. *7 Punkte*

---

**Aufgabe 14.**

(a) Zeichnen Sie die Hassediagramme des Posets $P = \underline{1} \oplus (\underline{2} + \underline{2}) \oplus \underline{1}$ und des Posets $\mathcal{O}(P)$ aller Ideale von $P$. Geben Sie den Elementen von $P$ geeignete Namen und notieren Sie an jedem Element von $\mathcal{O}(P)$ die Elemente des entsprechenden Ideals von $P$; unterstreichen Sie dabei die Elemente der erzeugenden Antikette.

(b) Charakterisieren Sie für beliebige Posets $P$ und $Q$ die Elemente von $\mathcal{O}(P \oplus Q)$ mit Hilfe der Elemente von $\mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{O}(Q)$. *6 + 4 = 10 Punkte*

---

**Aufgabe 15.**

Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \qquad \text{für } \; n,r,k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r} \; .$$

*8 Punkte*

---

**Aufgabe 16.**

N.N. behauptet:

"Die Anzahl der k-Multimengen, die man aus einer n-Menge bilden kann, ist $\frac{n^k}{k!}$, weil ...."

(a) Was hat N.N. vermutlich als Begründung gegeben und was ist daran verkehrt?

(b) Welches ist die richtige Anzahl? Ist diese $\geq$ oder $\leq$ als $\frac{n^k}{k!}$, oder hängt das von $n$ und $k$ ab?

(c) Geben Sie einen Beweis des richtigen Ergebnisses. *4 + 2 + 3 = 9 Punkte*

---

**Aufgabe 17.**

Eine Zählfunktion $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ habe die rationale erzeugende Funktion

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1} \; .$$

Bestimmen Sie eine Rekursionformel (inklusive Anfangsbedingungen) und eine explizite Darstellung für $f$. *12 Punkte*

---

# Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
# **Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 18.**

Für jede natürliche Zahl $n$ sei

$$L_n := \{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid 0 \leq l_i \leq n - i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

und $S_n$ die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L : S_n \longrightarrow L_n$ definiert durch

$$l_i = l_i(\pi) := \sharp\{j \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

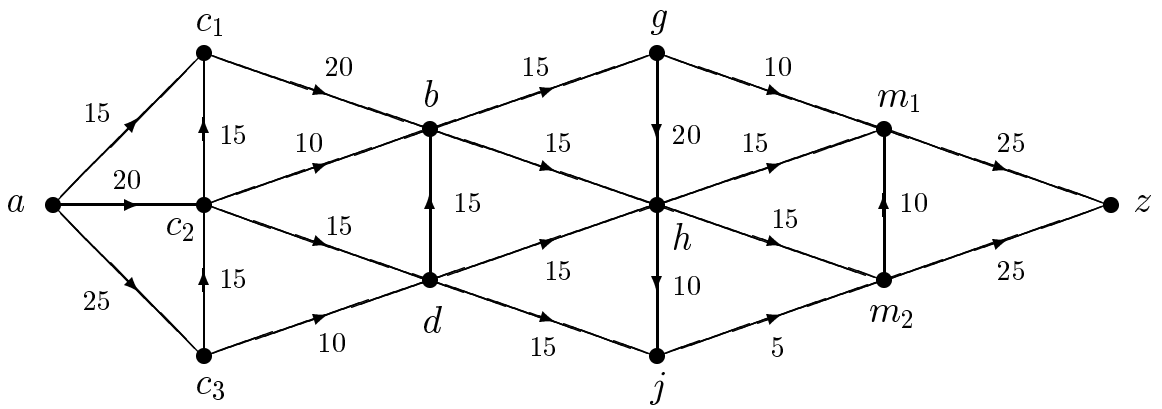
eine Bijektion mit $l_1 + \ldots + l_n = l(\pi)$ [$l(\pi)$ die Länge von $\pi$] ist.

(b) Berechnen Sie $L(\pi)$ für $\pi = 4163752 \in S_7$ und $L^{-1}(3, 6, 4, 0, 2, 1, 1, 0) \in S_8$. *6 + 2 = 8 Punkte*

---

**Aufgabe 19.**

Bestimmen Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk zwei maximale Flüsse mit *verschiedenen* zugehörigen minimalen Schnitten $L = (A, \overline{A})$:




Überprüfen Sie, dass es sich bei Ihren Lösungen tatsächlich um Flüsse handelt und dass in beiden Fällen die maximalen Flussstärken mit den minimalen Kapazitäten übereinstimmen; markieren Sie alle für die Berechnung der Kapazität relevanten Kanten. *12 Punkte*

---

**Aufgabe 20.**

(a) Geben Sie den Satz von Turan an und folgern Sie daraus, dass jeder Graph mit $2n$ Ecken und $n^2 + 1$ oder mehr Kanten einen $K_3$ als Untergraph enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph $G$ eine gerade Eckenzahl hat, und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von $G$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass es (bis auf Isomorphie) nur einen 3-regulären Graphen mit 4 Ecken geben kann. *4 + 2 + 2 = 8 Punkte*

---