

Gruppe B

1. (2+2+2+3 Pkt) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $K^{n \times n}$ der K -Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in K .

- (a) Ist die Abbildung $\text{sp}: K^{n \times n} \rightarrow K$, $A \mapsto \text{sp}(A)$, die jeder Matrix ihre Spur zuordnet, K -linear?

Lösung: Ja. Es seien $A, B \in K^{n \times n}$ und $r \in K$. Dann gilt $\text{sp}(rA + B) =$

$$\sum_{i=1}^n (rA + B)_{ii} = \sum_{i=1}^n (rA_{ii} + B_{ii}) = r \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} = r \text{sp}(A) + \text{sp}(B).$$

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in K^{n \times n}$ gilt: $\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA)$.

Lösung: $(AB)_{kk} = \sum_{i=1}^n A_{ki} B_{ik}$, $(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{ki}$. Daher gilt

$$\text{sp}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ki} B_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{ki} = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \text{sp}(BA).$$

- (c) Sei $K = \mathbb{Q}$. Gibt es Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ so, dass $AB - BA = I_n$ gilt? (Wenn ja, Beispiel angeben; wenn nein, begründen.)

Lösung: Nein. Wenn solche A, B existieren würden, so wäre $\text{sp}(AB - BA) = \text{sp}(I_n) = n$. Aber $\text{sp}(AB - BA) \stackrel{(a)}{=} \text{sp}(AB) - \text{sp}(BA) \stackrel{(b)}{=} 0$. Über \mathbb{Q} gilt $n \neq 0$.

- (d) Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Finden Sie alle Paare (A, B) mit $AB - BA = I_2$, wobei A eine obere 2×2 Dreiecksmatrix und B eine untere 2×2 Dreiecksmatrix ist.

Lösung: Laut (a), (b) gilt $\text{sp}(AB - BA) = 0$, und über \mathbb{Z}_2 ist $\text{sp}(I_2) = 1 + 1 = 0$. Seien

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} ab + ce & cf \\ de & df \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} ab & bc \\ ae & ce + df \end{bmatrix}, \quad AB - BA = \begin{bmatrix} ce & bc + cf \\ ae + de & ce \end{bmatrix}.$$

Also gilt $AB - BA = I_2$ genau dann, wenn $ce = 1$, $c(b + f) = 0$, $(a + d)e = 0$. Das System ist äquivalent zu $\{c = 1, e = 1, b = f, a = d\}$, das heißt, $b = f \in \{0, 1\}$ und $a = d \in \{0, 1\}$. Insgesamt gibt es 4 Lösungen (A, B) , wobei

$$A \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad B \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. (3+1+2 Pkt) Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K und $f: V \rightarrow W$ ein surjektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es (a) einen Homomorphismus $g: W \rightarrow V$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_W$ und dass dann gilt: (b) g ist injektiv und (c) $V = \text{Bi}(g) \oplus \text{Ke}(f)$.

Lösung:

(a) Da f surjektiv ist, gilt $\text{Bi}(f) = W$. Sei w_1, \dots, w_n eine Basis von W , dann existieren $v_1, \dots, v_n \in V$, so dass $f(v_i) = w_i$. Definieren wir $g(w_i) := v_i$ für alle i (eine lineare Abbildung ist durch das Bild einer Basis eindeutig festgelegt). Dann gilt für alle i : $(f \circ g)(w_i) = w_i$, per Linearität folgt $(f \circ g)(w) = w$ für alle $w \in W$, also $f \circ g = \text{id}_W$.

(b) Sei $w \in \text{Ke}(g)$, dann ist $g(w) = 0$ und daher $0 = f(0) = f(g(w)) = (f \circ g)(w) = w$, also $\text{Ke}(g) = \{0\}$ und g ist injektiv.

(c) $V \ni v = g(f(v)) + (v - g(f(v)))$, wobei $g(f(v)) \in \text{Bi}(g)$ und $f(v - g(f(v))) = f(v) - (f \circ g)(f(v)) = 0$, also $v - g(f(v)) \in \text{Ke}(f)$. Also gilt $V = \text{Bi}(g) + \text{Ke}(f)$. Sei $v \in \text{Bi}(g) \cap \text{Ke}(f)$, dann ist $f(v) = 0$ und es gibt $w \in W$, so dass $g(w) = v$. Daraus folgt $0 = f(v) = f(g(w)) = w$, also $w = 0$ und daher $v = g(w) = 0$, d.h., die Summe ist direkt. Alternativ für Direktheit: Dimensionsformel.

3. (2+2+2+2+2 Pkt) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A^T A = I_n$, so folgt $\det(A) \in \{1, -1\}$.

Lösung: Ja, denn $1 = \det(I_n) = \det(A^T) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$. Aus $x^2 = 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ folgt $x \in \{\pm 1\}$.

(b) Ist $A \in K^{n \times n}$, K ein Körper, so sind die Elemente $A^0, A^1, A^2, \dots, A^n$ des K -Vektorraumes $K^{n \times n}$ linear abhängig.

Lösung: Ja, denn das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[x]$ ist normiert und hat Grad n , d.h., $\chi_A = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ für geeignete a_i . Laut Hamilton-Cayley gilt $\chi_A(A) = 0$, d.h., $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A^1 + a_0A^0 = 0$ und die lineare Abhängigkeit folgt.

(c) Die Bilinearform $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 .

Lösung: Nein, da $b(x, x) = (x_1 + 2x_2)^2 = 0$ immer gilt, wenn $x = [-2t, t]^T$ für $t \in \mathbb{R}$, also nicht nur für $x = 0$.

(d) Ist $A \in K^{3 \times 3}$, K ein Körper, so gilt $(\text{adj}(A))_{31} = A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}$.

Lösung: Ja, denn

$$(\text{adj}(A))_{31} = \det(A^{(1,3)}) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} = A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}.$$

(e) Die Permutation $\pi \in S_5$ mit $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5)) = (5, 4, 2, 3, 1)$ ist gerade.

Lösung: Nein. Da $\pi = \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,5}$, ist π ungerade. Alternativ: Es gibt 9 Fehlstände.

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.

Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

4. (4+1+1+1 Pkt) Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

(d) Bestimmen Sie den Zeilenraum von A . *Hilfestellung zum Überprüfen Ihres Ergebnisses zu (a): Die Determinante liegt zwischen -100 und 100 und ist durch 9 teilbar.*

Antwort: Det: Rang: Spur: Zeilenraum: $\mathbb{R}^{1 \times 4}$

5. (2+2+2+2+2 Pkt) Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ -5 & 5 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(e) Ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt, hier nur ja/nein)

Antwort: EW: Rang: Diag.bar:

$$V(A, 0) = \langle [3, 5, 2]^T \rangle$$

$$V(A, 15) = \langle [9, -10, 11]^T \rangle$$

$$\dim V(A, 0) = 1$$

$$\dim V(A, 15) = 1$$

6. (2+4+2 Pkt) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1-a & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(a) invertierbar, (b) diagonalisierbar (Begründung auf Rechenblatt)? (c) Wie, wenn überhaupt, ändert sich Ihre Antwort zu (a) und (b), wenn Sie A als Element von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ auffassen? (Bitte (c) auf Rechenblatt beantworten.)

Antwort: Inv.bar für alle a mit: Diag.bar für alle a mit:

Lösung: (a) $\det(A) = a + 3$; (b) $\det(xI_2 - A) = x^2 - 4x + a + 3$. Ist $a > 1$, so gibt es keine reellen EW (nicht diag.bar). Wenn $a = 1$, gibt es nur einen EW, nämlich $\lambda = 2$ und es gilt $\dim(V(A, 2)) = 1 < 2$ (nicht diag.bar). Wenn $a < 1$, gibt es 2 reelle EW $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1-a}$, also ist A diag.bar für $a < 1$.

(c) Über \mathbb{C} : An der Antwort zu (a) ändert sich nichts. Die Antwort zu (b) ändert sich, denn für $a \neq 1$ gibt es immer zwei komplexe EW $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1-a}$, also diag.bar für alle $a \neq 1$. Der Fall $a = 1$ bleibt wie in (b). Also ist die Antwort zu (b) über \mathbb{C} : $a \neq 1$.