NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG ______________________________

Prof. Dr. Eva Zerz SS 2007

Lineare Algebra I – Klausur am 19.9.2007
Gruppe A

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	16	
2	16	
3	16	
4	16	
5	16	
6	20	

Viel Glück!

1. *(4+4+4+4 Pkt)* Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Wenn $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ das charakteristische Polynom $\chi_A = x^3 - 3x^2 + 2x$ hat, so ist A diagonalisierbar und es gilt $\operatorname{Rang}(A) = 2$.

   (b) Es gibt eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $\chi_{A^2} = (\chi_A)^2$.

   (c) Ist $A \in K^{3\times 3}$ so, dass $\chi_A = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_2, a_1, a_0 \in K$ und $a_0 \neq 0$, so folgt: A ist invertierbar und

   $$A^{-1} = -\tfrac{1}{a_0}(A^2 + a_2A + a_1I_3).$$

   (d) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda^2 + 9\lambda + 7$ ein Eigenwert von $A^2 + 9A + 7I_n$.

2. *(6+10 Pkt)* Es sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von

   $$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   erzeugt wird. (a) Zeigen Sie, dass x_1, x_2, x_3 eine Basis von U sind. (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

3. *(6+10 Pkt)* (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

nicht bijektiv ist. (b) Schreiben Sie für diesen speziellen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

4. *(4+12 Pkt)* (a) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, \tilde{A} \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Gilt $\tilde{A} = T^{-1}AT$ für ein invertierbares $T \in K^{n\times n}$, so folgt $A^k = T\tilde{A}^k T^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(b) Diagonalisieren Sie

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(d.h., bestimmen Sie T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist) und benutzen Sie (a), um A^{51} zu berechnen.
Hinweis: Bei richtiger Rechnung ergibt sich $(A^{51})_{11} = 3 \cdot 2^{51} + 2$. *In ähnlicher Form sollten auch die anderen Einträge von* A^{51} *angegeben werden.*

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.
Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

5. *(10+3+3 Pkt)* Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Antwort: Det: $\boxed{}$ Rang: $\boxed{}$ Spur: $\boxed{}$

6. *(4+4+4+4+4 Pkt)* Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(e) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt) (f) Bonus: Diskutieren Sie den Fall $a = 0$.

Antwort: EW: $\boxed{}$ Rang: $\boxed{}$ Diag.bar für alle a mit: $\boxed{}$

$V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $V(A,\ .\ ) =$

$\dim V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $\dim V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $\dim V(A,\ .\ ) =$