

Gruppe A

1. (4+4+4+4 Pkt) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ das charakteristische Polynom $\chi_A = x^3 - 3x^2 + 2x$ hat, so ist A diagonalisierbar und es gilt $\text{Rang}(A) = 2$.

Lösung: Wahr. Da $\chi_A = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$, gibt es 3 verschiedene Eigenwerte, also ist A laut Satz 6.6 diagonalisierbar. Daher ist A zu der Diagonalmatrix $\text{diag}(0, 1, 2)$ ähnlich und hat deswegen denselben Rang, d.h., 2. *Alternativ:* Laut Satz 3.19 ist $\text{Rang}(A) = 3 - \dim(\text{Ke}(f))$, wobei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$. $\text{Ke}(f)$ ist aber nichts anderes als der Eigenraum zum Eigenwert 0, welcher Dimension 1 hat. Daher ist $\text{Rang}(A) = 3 - 1 = 2$.

(b) Es gibt eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $\chi_{A^2} = (\chi_A)^2$.

Lösung: Falsch. Für eine $n \times n$ Matrix A hat χ_A Grad n . Da A^2 ebenso eine $n \times n$ Matrix ist, gilt $\text{Grad}(\chi_{A^2}) = n$, aber $\text{Grad}(\chi_A^2) = 2n > n$.

(c) Ist $A \in K^{3 \times 3}$ so, dass $\chi_A = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_2, a_1, a_0 \in K$ und $a_0 \neq 0$, so folgt: A ist invertierbar und

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^2 + a_2A + a_1I_3).$$

Lösung: Wahr. Da $\det(A) = \chi_A(0) = a_0 \neq 0$, ist A invertierbar. Laut Cayley–Hamilton gilt $0 = \chi_A(A) = A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I_3$, woraus man obige Formel ableitet.

(d) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist $\lambda^2 + 9\lambda + 7$ ein Eigenwert von $A^2 + 9A + 7I_n$.

Lösung: Wahr. Aus $Ax = \lambda x$ folgt $(A^2 + 9A + 7I_n)x = (\lambda^2 + 9\lambda + 7)x$. *Alternativ:* Wenn $\det(A - \lambda I_n) = 0$, dann gilt $\det(A^2 + 9A + 7I_n - \lambda^2 I_n - 9\lambda I_n - 7I_n) = \det(A^2 - \lambda^2 I_n + 9(A - \lambda I_n)) = \det(A - \lambda I_n) \det(A + (\lambda + 9)I_n) = 0$.

2. (6+10 Pkt) Es sei U der Unterraum von \mathbb{R}^4 , der von

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. (a) Zeigen Sie, dass x_1, x_2, x_3 eine Basis von U sind. (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

Lösung: (a) Da x_1, x_2, x_3 ein EZS von U sind, ist zu zeigen, dass x_1, x_2, x_3 linear unabhängig sind. Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ gilt. Dann gilt u.a. $a_2 + 5a_3 = 0, a_2 + 7a_3 = 0$, was $a_3 = a_2 = 0$ impliziert. Da $3a_1 + a_2 = 0$, ist auch $a_1 = 0$.

Antwort: (b)

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 8/5 \\ -6/5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. (6+10 Pkt) (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

nicht bijektiv ist. (b) Schreiben Sie für diesen speziellen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Lösung : (a) $\det(A) = a + 7$, also ist die Determinante genau dann gleich Null, wenn $a = -7$. (b)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

und der Spaltenraum wird von den ersten zwei Spalten erzeugt. Wir lösen jetzt das LGS $x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, was den von $[-4, 3, 1]^T$ erzeugten VR als Lösungsmenge hat. Schließlich setzen wir $B = [-4, 3, 1]$ und $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 0\}$ ist die Antwort.

4. (4+12 Pkt) (a) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, \tilde{A} \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie: Gilt $\tilde{A} = T^{-1}AT$ für ein invertierbares $T \in K^{n \times n}$, so folgt $A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Diagonalisieren Sie

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(d.h., bestimmen Sie T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist) und benutzen Sie (a), um A^{51} zu berechnen.

Hinweis: Bei richtiger Rechnung ergibt sich $(A^{51})_{11} = 3 \cdot 2^{51} + 2$. In ähnlicher Form sollten auch die anderen Einträge von A^{51} angegeben werden.

Lösung : (a) Induktion über k . Für $k = 1$ gilt die Aussage per Annahme. Wenn $A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}$ wahr ist, dann folgt $A^{k+1} = A \cdot T\tilde{A}^kT^{-1} = T\tilde{A}T^{-1}T\tilde{A}^kT^{-1} = T\tilde{A}^{k+1}T^{-1}$.

$$(b) \quad A = TDT^{-1}, \text{ wobei } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ und } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ also}$$

$$A^{51} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{51} + 2 & -2^{51} - 1 \\ 6 \cdot 2^{51} + 6 & -2 \cdot 2^{51} - 3 \end{bmatrix}.$$

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.

Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

5. (10+3+3 Pkt) Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Antwort: Det:

Rang:

Spur:

6. (4+4+4+4+4 Pkt) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (e) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt) (f) Bonus: Diskutieren Sie den Fall $a = 0$.

Antwort: EW: Rang: Diag.bar für alle a mit:

$$V(A, a) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad V(A, -a) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V(A, \cdot) =$$

$$\dim V(A, a) = 2$$

$$\dim V(A, -a) = 1$$

$$\dim V(A, \cdot) =$$

Lösung Für $a \neq 0$ haben wir zwei verschiedene Eigenwerte, deren Eigenräume die Dimensionen 2 und 1 haben. Da $2 + 1 = 3$, ist A für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diagonalisierbar.

Betrachten wir $a = 0$, dann ist A die Nullmatrix. Diese hat klarerweise nur einen Eigenwert, nämlich 0. Der Eigenraum dazu ist \mathbb{R}^3 , also von der Dimension 3. Die Nullmatrix ist also diagonalisierbar (klar, da sie ja selbst schon eine Diagonalmatrix ist).