

NAME _____

MATRIKELNUMMER _____

STUDIENGANG _____

Prof. Dr. Eva Zerz

SS 2007

Lineare Algebra I – Klausur am 19.9.2007
Gruppe B

- Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden
- Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	16	
2	16	
3	16	
4	16	
5	16	
6	20	

Viel Glück!

1. (4+4+4+4 Pkt) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- Wenn $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ das charakteristische Polynom $\chi_A = x^3 + 3x^2 + 2x$ hat, so ist A diagonalisierbar und es gilt $\text{Rang}(A) = 2$.
- Es gibt eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $\chi_{A^2} = (\chi_A)^2$.
- Ist $A \in K^{3 \times 3}$ so, dass $\chi_A = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_2, a_1, a_0 \in K$ und $a_0 \neq 0$, so folgt: A ist invertierbar und

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^2 + a_2A + a_1I_3).$$

- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist $\lambda^2 + 7\lambda + 9$ ein Eigenwert von $A^2 + 7A + 9I_n$.

2. (6+10 Pkt) Es sei U der Unterraum von \mathbb{R}^4 , der von

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. (a) Zeigen Sie, dass x_1, x_2, x_3 eine Basis von U sind. (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

3. (6+10 Pkt) (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

nicht bijektiv ist. (b) Schreiben Sie für diesen speziellen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

4. (4+12 Pkt) (a) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, \tilde{A} \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie: Gilt $\tilde{A} = T^{-1}AT$ für ein invertierbares $T \in K^{n \times n}$, so folgt $A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Diagonalisieren Sie

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(d.h., bestimmen Sie T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist) und benutzen Sie (a), um A^{51} zu berechnen.

Hinweis: Bei richtiger Rechnung ergibt sich $(A^{51})_{11} = -2 \cdot 2^{51} - 3$. In ähnlicher Form sollten auch die anderen Einträge von A^{51} angegeben werden.

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.

Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

5. (10+3+3 Pkt) Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Antwort: Det:

Rang:

Spur:

6. (4+4+4+4+4 Pkt) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(e) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt) (f) Bonus: Diskutieren Sie den Fall $a = 0$.

Antwort: EW: Rang: Diag.bar für alle a mit:

$V(A, \cdot) =$

$V(A, \cdot) =$

$V(A, \cdot) =$

$\dim V(A, \cdot) =$

$\dim V(A, \cdot) =$

$\dim V(A, \cdot) =$