17.7.2006

Scheinklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	8	9	10	11	Σ
Punkte							
Nachk.							

Sie benötigen **25** Punkte zum Bestehen dieser Klausur.

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Ergebnisse **nicht** begründen. Es zählen nur die richtigen Ergebnisse.

Zum schriftlichen Teil:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Lineare Algebra II, SS 2006, Prof. Dr. G. Hiß

Scheinklausur, 17.7.2006

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Scheinklausur, 17.7.2006, **Ankreuzteil**

Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Es gibt einen Körper mit genau 51 Elementen.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder Körper mit genau 32 Elementen enthält einen Teilkörper mit genau 4 Elementen.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder Körper der Charakteristik 0 enthält unendlich viele Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn A und B ähnlich sind, so sind sie auch äquivalent.	☐ Ja ☐ Nein
	Haben A und B die gleiche Spur und die gleiche Determinante, so sind sie ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein
	Es ist AB ähnlich zu BA.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn A und B ähnlich sind, und A symmetrisch ist, so ist auch B symmetrisch.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Es seien U, W_1, W_2 Untervektorräume von V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Aus $V = U \oplus W_1$ und $V = U \oplus W_2$ folgt $W_1 = W_2$.	☐ Ja ☐ Nein
	Jede Basis von U läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.	☐ Ja ☐ Nein
	Jede Basis von V enthält eine Teilmenge, welche Basis von U ist.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei K ein Körper und L ein Teilkörper von K. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Zerfällt μ_A über K in Linearfaktoren, so auch χ_A.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist 0 eine Nullstelle von χ_A, dann ist 0 auch eine Nullstelle von χ_{AB}.	☐ Ja ☐ Nein
	μ_A und χ_A haben die gleichen Nullstellen in K.	☐ Ja ☐ Nein
	Hat χ_A eine Nullstelle in L, so liegen alle Nullstellen von χ_A in L.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Weiter sei β eine Bilinearform auf V und $\lambda \in K$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Durch $\alpha(v, w) := \beta(w, \lambda\cdot v)$ für $v, w \in V$ wird auf V eine Bilinearform α definiert.	☐ Ja ☐ Nein
	$\dim(U^\perp) \geq \dim(V^\perp)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist β nicht-ausgeartet, so ist auch $\beta\,\vert_{U\times U}$ nicht-ausgeartet.	☐ Ja ☐ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur, 17.7.2006, **Ergebnisteil**

Tragen Sie bei den Aufgaben 6 und 7 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

6 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ über dem Körper mit drei Elementen.

Berechnen Sie

(a) die normierten Invariantenteiler der charakteristischen Matrix von A: $\boxed{}$

(3 Punkte)

(b) die normierten Elementarteiler der charakteristischen Matrix von A: $\boxed{}$

(1 Punkt)

(c) die Frobenius-Normalform von A: $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ *(1 Punkt)*

(d) die Weierstraß-Normalform von A: $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ *(1 Punkt)*

(e) die Jordan-Normalform von A (diese existiert!): $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ *(1 Punkt)*

(f) das charakteristische Polynom: $\chi_A = \boxed{}$

(1 Punkt)

(g) das Minimalpolynom: $\mu_A = \boxed{}$

(1 Punkt)

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur, 17.7.2006, **Ergebnisteil**

Tragen Sie bei den Aufgaben 6 und 7 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

7	Gegeben sind die Polynome $f_1 = X^3 - X^2 - X - 2$ und $f_2 = X^5 - 4X^3 + X^2 - 4$ in $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie (a) den normierten ggT d von f_1 und f_2: [ ] *(3 Punkte)* (b) Polynome $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $h_1 f_1 + h_2 f_2 = d$: [ ] *(2 Punkte)* (c) alle $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $f_1(A) = f_2(A) = 0 \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$: [ ] *(2 Punkte)*

Scheinklausur, 17.7.2006, **schriftlicher Teil**

Beantworten Sie die Aufgaben 8 bis 11 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter seien U und W Untervektorräume von V, so dass $V = U \oplus W$ ist. Zeigen Sie: $V/U \cong W$. *(3 Punkte)*
9	Geben Sie aus jeder Ähnlichkeitsklasse nicht-invertierbarer Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 2$ einen Vertreter an. Welche davon sind diagonalisierbar? *(6 Punkte)*
10	Es seien $(U, \\| \ \\|_U)$, $(V, \\| \ \\|_V)$ und $(W, \\| \ \\|_W)$ normierte Räume und $\beta : V \times W \to U$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (i) Es existiert ein $M > 0$ mit $\\|\beta(v,w)\\|_U \leq M \\|v\\|_V \\|w\\|_W$ für alle $v \in V$ und $w \in W$. (ii) Für jede konvergente Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit Grenzwert v und jede konvergente Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W mit Grenzwert w ist $(\beta(v_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in U mit Grenzwert $\beta(v,w)$. *(4 Punkte)*
11	Es seien U, V und W Vektorräume über einem Körper. Weiter seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen mit $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$. Zeigen Sie, dass für die zu φ bzw. ψ transponierten Abbildungen φ^* bzw. ψ^* gilt: $\mathrm{Kern}(\varphi^*) = \mathrm{Bild}(\psi^*)$. *(4 Punkte)*