03.03.2011

Klausur zur Linearen Algebra II, WS 10/11

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Es wird darauf hingewiesen, dass Sie eine Zulassung zu dieser Klausur erworben haben müssen und sich je nach Studiengang gegebenenfalls bei dem für Sie zuständigen Prüfungsamt angemeldet haben müssen. Ihre Teilnahme an der Klausur erfolgt insoweit vorbehaltlich einer gültigen Zulassung und Anmeldung. Durch Ihre Unterschrift bestätigen Sie die Kenntnisnahme dieser Regelung.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________

	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Nachk.									

Bitte beachten Sie:

- Bearbeiten Sie auf jeder Seite nur **eine** Aufgabe.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Ausführliche Begründungen bilden einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe.
- Achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

03.03.2011

Klausur zur Linearen Algebra II, WS 10/11

Prof. Dr. G. Hiß

Aufgabe 1: $5+1+2=8$ *Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

$\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $V = \mathbb{R}^4$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit $\mathrm{B}_{\mathcal{B}}(\beta) = A$.

a) Geben Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{O}$ von V bezüglich β an und bestimmen Sie $\mathrm{B}_{\mathcal{O}}(\beta)$.

b) Ist β ausgeartet?

c) Finden Sie einen Teilraum U maximaler Dimension mit der Eigenschaft, dass $\beta|_{U\times U}$ positiv definit ist und geben Sie eine Basis von U an.

Aufgabe 2: $3+4=7$ *Punkte*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^{n\times n}$ für einen Körper K. Weiter sei $\beta : V \times V \to K$ definiert durch

$$\beta(A,B) := \mathrm{Spur}(AB).$$

a) Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

b) Ist β ausgeartet?

Aufgabe 3: *8 Punkte*

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -4 \\ 9 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -6 \\ -17 & 19 & -18 \\ -5 & 10 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

Sind A und B ähnlich, d.h. existiert ein $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ mit $B = T^{-1}AT$?

Aufgabe 4: $4+4=8$ *Punkte*

Es sei K ein Körper.

a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in K^{4\times 4}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ an, die nicht ähnlich sind. Begründen Sie für jede der drei Eigenschaften, warum sie erfüllt ist.

b) Beweisen Sie: Zwei Matrizen $A, B \in K^{3\times 3}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ sind ähnlich.

Bitte wenden

Aufgabe 5: $2+2+2+2=8$ *Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$$

Berechnen Sie

a) die Frobenius Normalform von A.

b) das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

c) die Weierstraßsche Normalform von A.

d) die Jordansche Normalform von A, falls sie existiert.

Aufgabe 6: *7 Punkte*

Es seien U, V und W Vektorräume über einem Körper. Weiter seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ Homomorphismen mit $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen transponierten Abbildungen gilt: $\mathrm{Kern}(\varphi^*) = \mathrm{Bild}(\psi^*)$.

Aufgabe 7: *7 Punkte*

Es sei $f = \left[\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathrm{Iso}(2,\mathbb{R})$ mit $A \neq E_2$ und $\det(A) = 1$. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt in $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ besitzt.

Aufgabe 8: *7 Punkte*

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von φ genau dann irreduzibel in $K[X]$ ist, wenn es keinen φ-invarianten Unterraum U mit $0 \neq U \lneq V$ gibt.
