Nachholklausur zur „Linearen Algebra II“ (SS 93)

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.

Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, B eine Basis und φ die lineare Abbildung mit

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Man bestimem die Jordannormalform von φ. *5 Punkte*
2. Man bestimme eine Basis C von V, so daß $_C\varphi_C$ in Jordannormalform ist. *7 Punkte*

HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 2.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, Φ ein positiv definites Skalarprodukt, B eine Orthonormalbasis und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gegeben durch $_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Man bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ. *12 Punkte*
HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 3.
Es sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum, Φ ein positiv definites Skalarprodukt und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend, welche notwendig dafür, daß V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt? (Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!)

1. Das charakteristische Polynom von φ zerfällt in Linearfaktoren. *2 Punkte*
2. $\varphi = \varphi^{ad}$. *2 Punkte*
3. Die Frobeniusnormalform von φ besteht nur aus eindimensionale Kästchen. *2 Punkte*
4. $\mathrm{Kern}(\varphi - c) = \mathrm{Kern}((\varphi - c)^2)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. *4 Punkte*

HINWEIS: Bei Frage 1 bis 3 gibt es einen Punkte für die Beantwortung der Frage mit Begründung, ob die Bedingung hinreichend ist, und einen für die Beantwortung mit Begründung, ob die Bedingung notwendig ist.

Aufgabe 4.
Es sei $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der Körper mit fünf Elementen. Es seien weiter $f = x^3 + 3x + 4$ und $g = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ aus $\mathbb{F}_5[x]$ gegeben. Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler d mit führendem Koeffizienten 1 von f und g sowie Polynome a und b mit $d = f \cdot a + g \cdot b$. *8 Punkte*

Aufgabe 5.

Man berechne die Elementarteiler der Matrix $\begin{pmatrix} 1+x & x & 1 \\ x & x & x \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[x]^{3\times 3}$. *8 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(x) = (x+1)^2(x-1)$. Man bestimme die verschiedenen

1. Jordannormalformen J_i, zu denen A ähnlich sein könnte. *4 Punkte*
2. Weierstraßnormalformen W_i, zu denen A ähnlich sein könnte. *4 Punkte*
3. Frobeniusnormalformen F_i, zu denen A ähnlich sein könnte. *4 Punkte*
4. Elementarteiler von $A - x \cdot id$. *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei V ein zwei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $B = (B_1, B_2)$. Es sei weiter ein Skalarprodukt Φ auf V sowie eine lineare Abbildung φ von V nach V durch

$$_B\Phi_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } _B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme die zu φ adjungierte Abbildung φ^{ad}. *6 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei V ein 10-dimensionaler K-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V mit charakteristischem Polynom $p_\varphi(x) = (x-c)^{10}$ für ein $c \in K$. Es sei weiter

$$0 \leq \text{Kern}(\varphi - c) < \text{Kern}((\varphi - c)^2) < \ldots < \text{Kern}((\varphi - c)^k) = \text{Kern}((\varphi - c)^{k+1}).$$

Man bestimme die Dimensionen von $\text{Kern}((\varphi - c)^i)$ unter der Voraussetzung, daß es drei 1-dimensionale, zwei 2-dimensionale, und ein 3-dimensionales Jordankästchen gibt. *10 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen.

1. Man konstruiere den Körper mit vier Elementen als Restklassenring von $\mathbb{F}_2[x]$. *4 Punkte*
2. Man konstruiere den Körper mit vier Elementen als Teilmenge von ${\mathbb{F}_2}^{2\times 2}$. *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und $f = x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Man bestimme ein $g \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\text{Grad}(g) \leq 3$ und $((f) + x)^5 = (f) + g$. *6 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, das heißt, $A^{tr} = A$. Man zeige: es existiert eine invertierbare, Matrix T mit $T^{-1} = T^{tr}$, so daß $T^{tr} \cdot A \cdot T$ Diagonalgestalt besitzt. *10 Punkte*

HINWEIS: Benutzen Sie den Spektralsatz.